Exercice 1. Convergence et somme éventuelle des la série de terme général : $u_n = a \ln(n-1) + b \ln n + c \ln(n+1)$.

Exercice 2. 1. On pose pour tout entier n , $u_n = \arctan \frac{2}{(n+1)^2}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+2}$.

2. Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général u_n .

Exercice 3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$; $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$; $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$.

1. Calculer U_n , en déduire la nature de la série de terme général u_n .

2. Donner la nature de la série de terme général v_n et un équivalent de V_n .

Exercice 4. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

2. En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ et trouver un équivalent de S_n .

Exercice 5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

1. Écrire une fonction donnant u_n et v_n sans utiliser la fonction factorielle toute "prête" implémentée dans Python.

2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite ?

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $n!u_n < n!e < n!u_n + \frac{1}{n}$.

(b) En déduire que e n'est pas rationnel (on pourra raisonner par l'absurde).

4. Écrire un programme donnant un encadrement de e d'amplitude a , a étant choisi par l'utilisateur.

```
def approche(a):
    inv=1
    u=2
    k=1
    while inv/k>a:
        k+=1
        inv=inv/k
        u+=inv
    return u,k
```

```
from math import exp
a=0.00000001
u,k=approche(a)
print(u,k)
print(exp(1))
```

5. Montrer que $\frac{1}{(n+1)!} \leq e - u_n \leq \frac{1}{n \cdot n!}$. En déduire un encadrement de $\frac{v_n - e}{e - u_n}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n - e}{e - u_n}$.

Qui de $(v_n - e)$ et de $(e - u_n)$ tend plus vite vers 0 ?

Exercice 6. On considère une suite (u_n) décroissante, de limite 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$

1. Dans cette question, $\forall k \geq 1$, $u_k = \frac{1}{k}$. Écrire une fonction donnant la représentation graphique de S_n

On redonne la syntaxe ; import matplotlib.pyplot as plt ... plt.show()

2. (a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

(b) En déduire que la suite (S_n) converge vers une limite finie ℓ .

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n}$.

3. Dans cette question x est un réel de $[0,1]$ et b un réel positif ou nul et on pose $T_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+b}$.

(a) Calculer T_n

(b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{b+k+1} = \int_0^1 \frac{x^b}{1+x} dx$

(c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$. Écrire une fonction python qui retourne une valeur approchée de $\ln 2$ à ε près.

Exercice 7. Convergence et somme éventuelle des séries de termes généraux :

$$u_n = x^n \sin(n\theta), \text{ avec } |x| < 1 \quad ; \quad u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n!} \quad ; \quad u_n = (n + (-1)^n)3^{-n}$$