Intégration 2018-2019

Exercice 1. On pose $\forall t \in [0,1],\ h(t) = \dfrac{e^t}{1+t}$, $\quad J = \displaystyle\int_0^1 h(t)\,dt$, $\quad$ et $\forall n \geqslant 1$, $\quad U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)$, $\quad V_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right)$

1. Vérifier que h est croissante.
2. Montrer que, pour tout k de $\{0,\dots,n-1\}$ on a : $\dfrac{1}{n}h\left(\dfrac{k}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t)\,dt \leqslant \dfrac{1}{n}h\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leqslant J \leqslant V_n$
4. Vérifier que, pour tout $n \geqslant 1$: $\left| J - \dfrac{U_n+V_n}{2} \right| \leqslant \dfrac{h(1)-h(0)}{n}$
5. Écrire une fonction qui prend en paramètre ε et qui retourne une valeur approchée de J à ε près.

Exercice 2. On définit la fonction numérique f sur $\mathbb{R}_+$ par la relation : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,dt$.

1. (a) Proposer une fonction `Python` prenant en argument un réel $x > 0$ et retournant une approximation de $f(x)$.
   (b) Proposer une approximation du graphe de la fonction f à l'aide de l'outil informatique. Conjecturer un résultat sur la monotonie de la fonction f et sur les limites au bord de son domaine de définition.
2. Soient x et x' dans $\mathbb{R}_+$ tels que $x < x'$. Déterminer le signe de $f(x) - f(x')$. En déduire que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Ce résultat est-il cohérent avec le graphe de f ?
4. Montrer qu'il existe un réel A tel que pour tout réel x strictement positif : $\dfrac{A}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{A}{x}$.
   En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.
5. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.
   Montrer que $\forall x \in \left[\dfrac{x_0}{2}, +\infty\right[$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{2|x-x_0|(e-1)}{x_0^2}$. $\quad$ En déduire que f est continue en x_0.
6. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t}\,dt$.
   En utilisant le théorème des accroissement finis démontrer que $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant e^t - 1 \leqslant te$ $\quad$ et que g est une fonction bornée.
   En déduire un équivalent simple de f en 0.

Exercice 3. On considère la suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour n dans $\mathbb{N}^*$ et la série de terme général u_n.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. On note $T_n = S_{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $V_n = S_{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que les suites (T_n) et (V_n) ont la même limite. En déduire que la série de terme général u_n converge.
2. Écrire en Python une fonction `somme` qui prend n en paramètre et qui renvoie la valeur de S_n.
3. A l'aide du module matplotlib.pyplot, tracer une représentation graphique de la suite (S_n).
4. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, montrer que : pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}}\,dt$.
5. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(1+x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{[-1)^k}{k}x^k - (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$.
6. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]0,1]$, $\left| \ln(1+x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{[-1)^k}{k}x^k \right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
7. En déduire la limite de S_n.

Exercice 4. On considère les fonctions f, F et G définies sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$, $\quad F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \quad$ et $\quad G(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt$.

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = xG(x)$.
2. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer G' en fonction de F et f.
3. En déduire les variations de G sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 6. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \exp(-\frac{1}{t})\, dt$.

1. On note $\forall t \in]0,1],\ g(t) = \exp\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ et $g(0) = 0$. Montrer que g est dérivable sur $[0,1]$ et déterminer $g'(0)$.

   En déduire que u_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Écrire une fonction python qui donne une valeur approchée de u_n.
   (b) Écrire une fonction qui prend n et p en entrée et calcule $u_n n^p$.
   (c) Conjecturer la limite du produit $u_n n^p$ pour p variant de 1 à 100.

3. Soit f une fonction de classe C^∞ sur $[0,1]$. on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)(1-t)^n\, dt$.
   (a) Montrer que $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in [0,1],\ |f(t)| \leqslant M$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(f) = 0$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(f) = \dfrac{f(0)}{n+1} + \displaystyle\int_0^1 f'(t) \frac{(1-t)^n}{n+1} dt$.
   (d) Montrer que pour n fixé et pour tout entier naturel k :
   $$I_n(f) = \frac{f(0)}{n+1} + \frac{f'(0)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{(n+1)\ldots(n+k+1)} + \frac{1}{(n+1)\ldots(n+k+1)} I_{n+k+1}(f^{(k+1)}).$$
   (e) Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$I_n(f) = \frac{f(0)}{n+1} + \frac{f'(0)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{(n+1)\ldots(n+k+1)} + \frac{1}{n^{k+1}}\varepsilon_{k,n} \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_{k,n} = 0.$$

4. Démontrer la conjecture du 2c.

Exercice 7. On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin t} dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Étudier la parité de f.
2. Donner la limite de f en $+\infty$.
3. En remarquant que $\dfrac{\ln 2}{2} = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{2t}$ démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\ln 2}{2}$.
4. On prolonge par continuité f en 0. On appelle $\widetilde{f}$ ce prolongement. Est-ce que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0 ?

Exercice 8.

1. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t\, dt$ converge et calculer sa valeur pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^n \frac{\ln t}{t-1} dt$ converge pout tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n \frac{\ln t}{t-1} dt = 0$
3. Justifier : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = -\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln t\, dt + \int_0^1 t^{n+1} \frac{\ln t}{t-1} dt$.
4. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 9. On pose pour $x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

1. Démonter que F est bien définie pour $x > 0$ et que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u} du$.
2. Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-u}-1}{x+u} du$ et $H(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u} du$ sont bornées.

   En déduire que $F(x) \sim -\ln(x)$ quand x tend vers 0.

3. Quelle est la limite de F en $+\infty$? Trouver un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

   On utilisera $\forall (x,u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+u} \leqslant \dfrac{u}{x^2}$.