**Géométrie 2018-2019**

**Exercice 1.** On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On pose : $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(1,\sqrt{2},1)$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(1,-\sqrt{2},1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

   Écrire la matrice de passage $P_1$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_1$ ainsi que son inverse. Déterminer sans calcul ${}^tP_1P_1$.

2. Soit $P_2 = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer ${}^tP_2P_2$. Qu'en déduit-on sur la famille $\mathscr{B}_2$ des vecteurs colonnes (resp. lignes) de $P_2$ ?

3. Former la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.

**Exercice 2.** On considère $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On pose :
$\forall k \in [\![1,4]\!]$, $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{4} e_i - 2e_k\right)$. Montrer que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base orthonormale. Quelle est la matrice $P$ de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ ?

**Exercice 3.** Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, canonique, on appelle $P$ le plan engendré par $\overrightarrow{u_1} = (1,1,0)$ et $\overrightarrow{u_2} = (1,0,1))$. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $P$, une équation cartésienne, une base orthonormale du plan.

**Exercice 4.**

$\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique. On note $D$ la droite engendrée par $\overrightarrow{a} = (1,1,-3)$. Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale de $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ sur $D$ et la distance de $\overrightarrow{v}$ à $D$.

**Exercice 5.** $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique.
On appelle $P$ le plan engendré par $\overrightarrow{u_1} = (1,0,1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (0,1,2))$.

1. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $P$. Démontrer que la distance de $\overrightarrow{v}$ à $P$ est $\dfrac{|\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$.

2. Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur $P$.

**Exercice 6.** Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+2y+z+2t = 0\}$ et $G = \{u \in \mathbb{R}^4,\ \forall v \in F,\ (u \cdot v) = 0\} = F^{\perp}$.

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera une base.

2. Déterminer $G$ et en donner une base orthonormée.

3. On note $p$,(respectivement $q$), la projection orthogonale sur $F$ (respectivement sur $G$).

   Donner la matrice de $q$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. En déduire celle de $p$.

4. Pour tout vecteur $u = (x,y,z,t)$, déterminer la distance de $u$ à $F$, en déduire la distance de $u$ à $G$.

**Exercice 7.** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Déterminer la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur la droite engendrée par $(a,b,c)$.

**Exercice 8.** $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. On pose : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

On note $f$ l'endomorphisme représenté par $A$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ f(u).f(v) = u.v$.

2. Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par $f$ est une droite vectorielle. On la notera $D$.

3. Montrer que le plan $P$ orthogonal de $D$ est stable par $f$.

4. Déterminer une base orthonormale de $P$. Quelle est la matrice de la restriction de $f$ à $P$ dans cette base ?

**Exercice 9.** Soit $a$ un vecteur non nul d'un espace vectoriel $E$ muni d'une base $(e_1,\dots,e_n)$.

On définit l'application $f_a$ de $E$ dans lui-même par : $\forall u \in E,\ f(u) = 2\dfrac{< a,u >}{< a,a >}a - u$

1. Montrer que $f_a$ est un endomorphisme de $E$. Déterminer $f_a \circ f_a$.

2. Établir que $\forall (u,v) \in E^2,\ < f_a(u), f_a(v) >=< u,v >$ et $\|f_a(u)\| = \|u\|$.

3. Démontrer que $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base orthonormée de $E$.

4. Caractériser $\ker(f_a - Id)$ et $\ker(f_a + Id)$.

5. On pose : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver un vecteur $a$ tel que $f_a$ soit représenté par $A$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

6. Déterminer une base orthonormée de $\ker(f_a - Id)$ et $\ker(f_a + Id)$. Vérifier que la juxtaposition de ces bases est une base de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathscr{B}'$.

7. Quelle est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ ? On la notera $P$. Déterminer la matrice $P^{-1}AP$.

**Exercice 10.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $A$ et $f^\star$ celui associé à ${}^tA$.

Montrer que $\ker({}^tAA) = \ker(A)$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \cdot f(x) = x \cdot f^\star(x)$.

**Exercice 11.** Soit $e'_1 = (2,0,-1,1)$, $e'_2 = (1,1,1,1)$ et $u = (u_1,u_2,u_3,u_4)$.

On pose $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$, $\quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Quel est le rang de $M$ ?

2. Calculer la matrice ${}^tMM$ et justifier son inversibilité.

3. On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ minimisant $\|u - xe'_1 - ye'_2\|$. Montrer que ce problème a une solution unique et qu'elle vérifie la relation ${}^tMM\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ={}^t MU$.