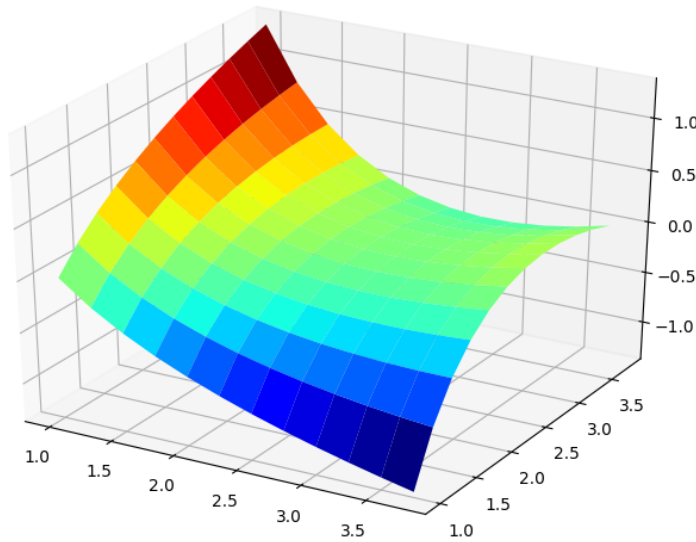


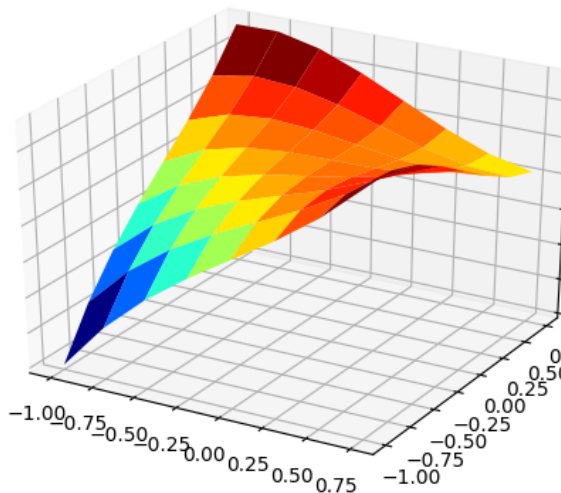
Exercice 1. On pose $\varphi(t) = \ln t - t + \frac{1}{t}$ et $f(x, y) = x \ln y - y \ln x$

1. Montrer que φ s'annule une et une seule fois sur son ensemble de définition.
2. Chercher le gradient de f . Montrer que si le gradient de f s'annule en (x, y) , alors $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 0$.
3. En déduire que f ne peut avoir qu'un extrémum local. Montrer alors que f n'a pas d'extrémum local.

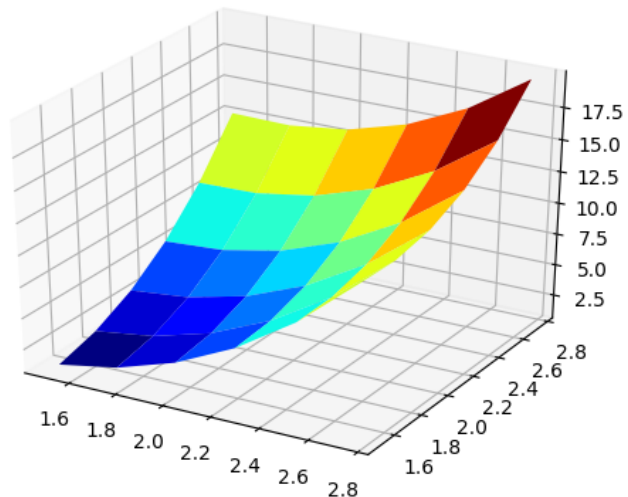


Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$.

1. Déterminer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points où f est susceptible d'avoir des extréma.



En (0,0)



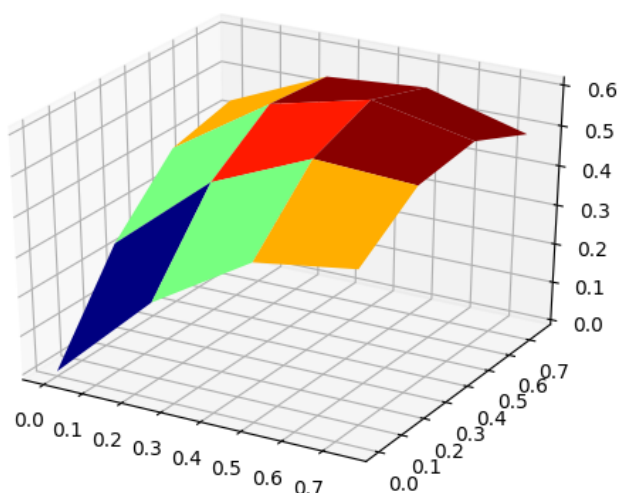
En (1,1)

Exercice 3. On pose $f(x, y) = (x + y)e^{-(x^2+y^2)}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer le gradient de f . Quelles sont les valeurs de (x, y) susceptibles d'être des extrema ?
2. Quels sont les maximum $M(r)$ et minimum $m(r)$ de f sur le cercle $\mathcal{C}_r$ de centre O et de rayon r ?
3. Étudier les variations de $m(r)$ et $M(r)$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. En déduire que f admet un minimum et un maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. On pose $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$.
3. En déduire l'existence éventuelle d'extrema sur $\mathbb{R}^2$.



Exercice 5. Déterminer les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que la fonction g définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ vérifie : } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

Exercice 6. Soit un entier $n \geq 2$. On considère deux séries statistiques $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

On note :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \text{ leurs moyennes empiriques,}$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2, \quad s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2 \text{ leurs variances empiriques,}$$

$$s_{x,y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \text{ la covariance de } x \text{ et } y$$

$$\text{et } r_{x,y} = \frac{s_{x,y}}{s_x s_y} \text{ le coefficient de corrélation linéaire de } x \text{ et } y.$$

On suppose que les réels $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas tous égaux.

On considère la fonction de deux variables f définie par : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a, b) = \sum_{k=1}^n (y_k - (ax_k + b))^2$.

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial a}(a, b)$ et $\frac{\partial f}{\partial b}(a, b)$.

2. En déduire que si f admet un minimum en (a_0, b_0) , alors (a_0, b_0) vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n (y_k - (a_0 x_k + b_0)) x_k = 0 \\ \sum_{k=1}^n (y_k - (a_0 x_k + b_0)) = 0 \end{array} \right.$$

3. En déduire que nécessairement $a_0 = \frac{s_{x,y}}{s_x^2}$ et $b_0 = \bar{y} - a_0 \bar{x}$.