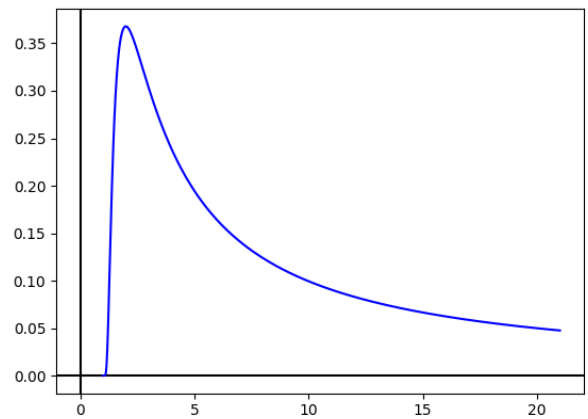
Équations différentielles 2018-2019

Exercice 1. Soit l'équation différentielle $(1-x)^2 y' = (2-x)y$.

1. Résoudre sur $]1,+\infty[$. Trouver la solution f telle que $f(2) = \dfrac{1}{e}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$. Étudier la branche infinie de $\mathscr{C}_f$.

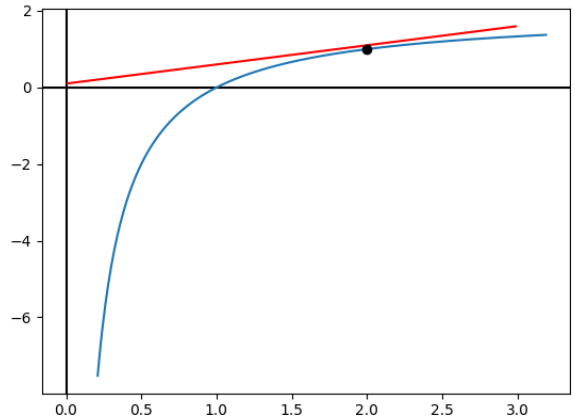
```
def f(x):
    return exp(-1/(x-1))/(x-1)

import matplotlib.pyplot as plt
from math import exp

X=[1.01+k/100 for k in range(2000)]
Y=[f(x) for x in X]
plt.axhline(color='k')
plt.axvline(color='k')
plt.plot(X,Y,color='b')
plt.show()
```



Exercice 2. On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ vérifiant :
$\forall x \in]0,+\infty[,\ xf'(x) - |1-f(x)| = 1$.

1. (a) Résoudre l'équation différentielle (E1) $xy'(x) - y(x) = 0$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle (E2) $xz'(x) + z(x) = 2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   (c) Représenter à l'aide de l'outil informatique la fonction y vérifiant $y(2) = 1$ et la fonction z avec $z(2) = 1$.
2. (a) Démontrer que f est strictement croissante.
   (b) Si f est minorée par 1, montrer que f est solution de (E1). Calculer la limite en 0 et arriver à une contradiction.
   (c) Si f est majorée par 1, montrer que f est solution de (E2). Comme précédemment arriver à une contradiction.
   (d) En déduire qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = 1$.
   (e) Donner l'expression de f sur $]0,x_0[$ et $]x_0,+\infty[$. Conclure.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def y(x): return x/2

def z(x): return -2/x+2

X=[1/5+k/100 for k in range(1,300)]
Y=[y(x) for x in X]
Z=[z(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,Z)
plt.show()
```



Exercice 3. On considère l'équation différentielle (E) : $xy'(x) + 2y(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$
Dans les calculs de résolution, on pourra utiliser le fait que $x^3 = x(1+x^2) - x$

1. (a) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

(b) En supposant que y soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, que vaut $y(0)$? Existe-t-il une (des) solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction y continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie (E) pour tout x réel ?

2. Déterminer la solution y de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $y(1) = \dfrac{1}{2}$. On notera f cette fonction.

3. Soit y une solution de (E), prenant la valeur y_0 au point x_0. On note $F(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2} - 2\dfrac{y}{x}$; h notera un réel supposé "assez petit"

   (a) Expliquer pourquoi on peut faire l'approximation $y(x_0+h) \simeq y_0 + hF(x_0, y_0)$.
   On note y_1 cette approximation : $y_1 = y_0 + h * F(x_0, y_0)$

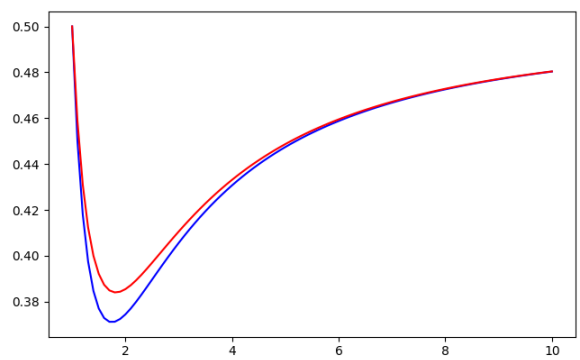
   (b) En notant $x_i = x_0 + ih$, quelle approximation donner pour $y(x_2)$?

   (c) On construit ainsi par récurrence la suite des valeurs y_i : $y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i)$
   Écrire une fonction Python qui renvoie, à partir de $x_0 = 1$, $y_0 = 0.5$ le pas h, et la borne supérieure b des x_i, les deux listes des valeurs des x_i et y_i.

4. Faire tracer sur un même graphe la représentation de f et la ligne brisée des x_i, y_i pour $h = 0.1$ et $b = 10$.

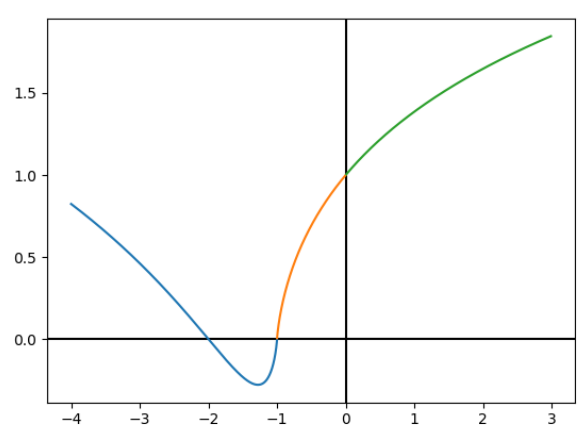
```
def F(x,y):
    return x/(1+x**2)-2*y/x

def f(x):
    y=0.5-log(1+x**2)/(2*x**2)+log(2)/(2*x**2)
    return y

def Approxf(h,b):
    x0,y0=1,0.5
    X=[x0]
    Y=[y0]
    %for k in np.arange(1,b,h):
    while x0<b:
        x1=x0+h
        y1=y0+h*F(x0,y0)
        X.append(x1)
        Y.append(y1)
        x0,y0=x1,y1
    return X,Y
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import log
import numpy as np

X,Y=Approxf(0.1,10)
plt.plot(X,Y,color='b')
Y1=[f(x) for x in X]
plt.plot(X,Y1,color='r')
plt.show()
```



Exercice 4. Résoudre : $x(x+1)y' + y = x+1$. Y a-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

```
def f(x): return (x+1)*log(abs(x+1))/x

plt.clf()
X1=[-4+k/1000 for k in range(3000)]
Y1=[f(x) for x in X1]
X2=[-1+k/1000 for k in range(1,1000)]
Y2=[f(x) for x in X2]
X3=[k/100 for k in range(1,300)]
Y3=[f(x) for x in X3]
plt.plot(X1,Y1)
plt.plot(X2,Y2)
plt.plot(X3,Y3)
plt.show()
```



Exercice 5. Résoudre : $y'' - 3y' + 2y = x^2 e^x$ et $y'' - 2y' + 2y = \cos x$.

Exercice 6. On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant :
$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 f''(x) - 4xf'(x) + 6f(x) = 0$.

1. Vérifier que l'ensemble E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ appartenant à l'espace vectoriel E.

3. Soit f un élément de E. On définit une application g de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.

   Montrer que l'application g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et que g'' est nulle. En déduire la dimension et une base de l'espace vectoriel E.

4. Retrouver les solutions sur $\mathbb{R}_+^\star$ en faisant le changement de variable $t = \ln x$.