Nombres complexes et polynômes 2018-2019

1. z et $z^{'}$ étant deux nombres complexes montrer que :
   $|z+z^{'}|^2+|z-z^{'}|^2=2(|z|^2+|z^{'}|^2)$ et $|z|+|z^{'}|\leqslant|z+z^{'}|+|z-z^{'}|$. Interprétation ?

2. $P=\{z\in\mathbb{C}, \mathrm{Im}(z)>0\}$ et $D=\{z\in\mathbb{C}, |z|<1\}$.
   Montrer que l'application $z\mapsto\dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de P sur D. Déterminer son inverse.

3. Comment faut-il choisir n pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit réel, réel positif, imaginaire pur ?

4. Linéariser $\sin^3 x$. En déduire $\sum\limits_{k=1}^{n}3^{k-1}\sin^3\dfrac{a}{3^k}$.

5. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+1}$.

6. On pose $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}$. Calculer M^2 et $M\overline{M}$. Résoudre $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

7. E désigne l'espace vectoriel des suites réelles.
   F est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$.
   (a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et que l'application $L:F\to\mathbb{R}^2$ définie par $L(u)=(u_0,u_1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $r^2-r+1=0$.
   (c) On appelle θ l'argument de l'une des solutions. On définit les suites a et b par $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\cos n\theta$ et $b_n=\sin n\theta$. Démontrer que (a,b) est une base de F.

8. Trouver tous les entiers naturels n tels que le polynôme $(X+1)^n-X^n-1$ soit factorisable par X^2+X+1. Par $(X^2+X+1)^2$? Factoriser le polynôme $P=(X+1)^7-X^7-1$.

9. Quel est l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans le polynôme : $nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$?

10. Trouver tous les polynômes P de degré 5 tels que $P(X)-1$ soit factorisable par $(X-1)^3$ et $P(X)+1$ soit factorisable par $(X+1)^3$.

11. (G2E 2009) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^6-2\cos(\theta)z^3+1=0$ avec θ un réel donné.

12. En utilisant une formule d'Euler, montrer que $2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est racine de X^2+X-1. En déduire sa valeur.

13. On pose $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}X^k$ et $z_k=\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k\in[\![1,n-1]\!]$.
    Montrer que pour $z_1,\dots,z_{n-1}$ sont racines de P. Factoriser P. En déduire $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{k\pi}{n}$

14. (INA 2005) On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ par la donnée de $P_0=2$, $P_1=X$ et la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ P_{n+2}=XP_{n+1}-P_n$.
    (a) Calculer P_2, P_3 et P_4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, déterminer le terme de plus haut degré du polynôme P_n.
    (b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $z\in\mathbb{C}^*$ on a : $P_n\left(z+\dfrac{1}{z}\right)=z^n+\dfrac{1}{z^n}$.
    (c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout entier k tel que $0\leqslant k\leqslant n-1$, le réel $\alpha_k=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}+k\dfrac{\pi}{n}\right)$ est racine de P_n. Ces racines sont-elles deux à deux distinctes ? Que peut-on en conclure ?