

Rappels d'analyse 2018-2019

Exercice 1. On considère la suite déterminée par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et la relation de récurrence :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1. Écrire un programme python pour conjecturer la convergence de la suite (u_n) .
2. Étudier la fonction $x \mapsto \ln(1 + x) - x$. Quel est son signe ?
3. Quelles sont les limites possibles de la suite (u_n) ?
4. Étudier la convergence de la suite (u_n) .
5. En déduire l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que :
pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) = h(\ln(1 + x))$.

```
def Suite (n,u) :
    U=[u]
    for k in range(n):
        u=log(1+u)
        U.append(u)
    return U
```

```
from math import log
import matplotlib.pyplot as plt

n,u=100,5
U=Suite (n,u)
plt.plot(U) ; plt.show()
```

Exercice 2. On étudie l'évolution d'une population de cerfs : on note x_0 l'effectif initial et x_n l'effectif de l'année n . On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n \exp\left(\mu\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)\right)$ où $0 < \mu < 1$ est le taux de croissance et $K > 0$ la capacité du milieu.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \geq 0, f(x) = xe^{\mu\left(1 - \frac{x}{K}\right)}$.

1. Écrire une fonction X d'arguments n, x_0, K et μ qui renvoie la liste $[x_0, \dots, x_n]$.
Tester pour $X(15, 100, 1000, 0.5)$.
 - (a) Montrer qu'il existe deux solutions positives ou nulles de l'équation : $f(x) = x$ que l'on note α et β
Que peut-on dire de la suite si $x_0 = \alpha$ ou $x_0 = \beta$? Que représentent α et β pour la population de cerfs ?
 - (b) Donner le tableau de variation de f
2. On suppose que $x_0 \in [0, K]$.
 - (a) Exécuter le programme pour différentes valeurs de x_0 et de μ .
Que peut-on conjecturer sur la variation de (x_n) et sa convergence ?
 - (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [0, K]$.
 - (c) Déterminer le sens de variation de (x_n) . Est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
3. On suppose que $x_0 \in]K, K/\mu]$.
 - (a) Exécuter le programme pour différentes valeurs de x_0 et de μ .
 - (b) Que peut-on conjecturer sur la variation de (x_n) et sa convergence ?
 - (c) Déterminer le sens de variation de (x_n) . Est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
4. On suppose que $x_0 > K/\mu$.

- (a) Montrer qu'il existe $\delta \in [0, K/\mu]$ tel que $f(\delta) = f(x_0)$.
- (b) Écrire un programme qui donne une valeur approchée de δ .

```
def f(x): return x*exp(mu*(1-x/K))
```

```
def SuiteX(n,x,K,mu):
    X=[x]
    for j in range(n):
        x=f(x)
        X.append(x)
    return X
```

```
def dichotomie(eps,x,K,mu):
    a=0 ; b=K/mu
    while b-a>eps:
        c=(a+b)/2
        if f(c)<f(x): a=c
        else: b=c
    return c
```

```
from math import exp
import matplotlib.pyplot as plt

n,x,K,mu=10,100,1000,0.5
plt.plot(SuiteX(n,x,K,mu)) ; plt.show()

x,K,mu=4500,1000,0.8 ; print(K/mu)
c=dichotomie(0.001,x,K,mu)
print(c, f(c), f(x))
plt.plot(SuiteX(n,x,K,mu)) ; plt.show()
```

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

- Écrire un programme Python permettant l'affichage de la courbe de la fonction f sur $[-3, 5]$ et de la première bissectrice ($y = x$) sur un même graphique. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- Soit $a \in [0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
 Avec un programme en Python, faire afficher les premières valeurs de cette suite pour différentes valeurs de a . Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite (u_n) ?
- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0, 1]$ une unique solution que l'on notera α .
- Montrer que tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $[0, 1]$.
 Déterminer un réel M vérifiant $0 < M < 1$, et tel que : $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq M$.
 A l'aide du théorème des accroissements finis démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq M|u_n - \alpha|$.
 En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq M^n$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?
- A l'aide des questions précédentes, écrire un programme en Python permettant le calcul d'une valeur approchée de α à ϵ près, où ϵ est un paramètre strictement positif.

```
def f(x): return 1-x**2/2+x**3/6
```

```
def CalculU(a,n):
    U=[a]
    for k in range(n):
        a=f(a)
        U.append(a)
    return U
```

```
def ApproxAlpha(eps):
    M=1/2
    a=0.5
    while M>eps:
        a=f(a)
        M=M/2
    return a
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
X=[-3+j/10 for j in range(80)]
Y=[f(x) for x in X]
plt.figure(1)
plt.plot(X,X)
plt.plot(X,Y) ; plt.show()
plt.figure(2)
U=CalculU(0.4,10)
plt.plot(U) ; plt.show()
alpha=ApproxAlpha(0.001)
print(alpha, f(alpha))
```

Exercice 4. On définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}$ avec n appartenant à $\mathbb{N} \setminus 0$ par : $f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$

1. (a) Calculer $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$. Montrer que f_n est strictement croissante.
 (b) Montrez qu'il existe un unique réel noté u_n tel que $f_n(u_n) = 0$. Montrer que $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq 0$.
2. (a) Complétez la fonction suivante pour avoir u_n à ϵ près :

```
def f(n,x):
    return 1/(1+exp(x))+n*x
```

```
def dichotomie(n,eps):
    a,b=...
    while (b-a)>... :
        c=(a+b)/2
        if f(n,a)*f(n,c)>0:
            ....
        else:
            ....
    return ....
```

- (b) Grâce à un programme informatique (utilisant notamment celui de la question précédente) prévoir les variations de (u_n) .
3. Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$. Quel est le signe de $f_{n+1}(u_n)$? En déduire les variations de la suite (u_n) .
4. Montrez que u_n est équivalent en $+\infty$ à $-\frac{1}{2n}$. Trouvez un équivalent de $\frac{1}{2} + nu_n$ en $+\infty$.

```
def dichotomie(n,eps):
    a,b=-1/n,0
    while (b-a)>eps :
        c=(a+b)/2
        if f(n,a)*f(n,c)>0:
            a=c
        else:
            b=c
    return c
```

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on notera a_n .
2. Tracer les courbes représentatives de f_1, f_2, f_3, f_4 sur $[0, 1]$. Quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie de la suite (a_n) et sa convergence ?
3. Déterminer le signe de $f_{n+1}(a_n)$. En déduire la monotonie de la suite (a_n) .
4. Montrer que la suite (a_n) converge vers ℓ tel que $\frac{1}{1-\ell} - 2 = 0$. en déduire ℓ .

```
def fonc(n,x):
    y=0
    for k in range(1,n+1):
        y=y+x**k
    return y-2
```

```
import matplotlib.pyplot as plt

X=[j/20 for j in range(20)]
for n in range(1,5):
    Y=[fonc(n,x) for x in X]
    plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

Exercice 6. Pour tout entier $n > 0$ on pose $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2$

1. Écrire une fonction python pour représenter graphiquement e^{u_n} et e^{v_n} pour n compris entre 1 et 1000.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \arctan(x) \leq x$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq u_n$.
4. À l'aide du théorème des accroissements finis montrer que $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

En déduire que $u_n - v_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{2k+1}{(k+1)^2}$ puis qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{C}{n}.$$

5. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui déterminer sa limite.

```
def Representeur(n):
    U=[] ; u=0 ; V=[] ; v=0
    for k in range(1,n):
        u+=1/(2*k-1)+1/(2*k)-1/k
        v+=atan(1/sqrt(2*k-1))**2+atan(1/sqrt(2*k))**2-atan(1/sqrt(k))**2
        U.append(exp(u))
        V.append(exp(v))
    plt.plot(U)
    plt.plot(V)
    plt.show()
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import atan, sqrt, exp
Representeur(100)
```

Exercice 7. Soit t un réel positif ou nul. Pour tout réel x , on pose : $P_t(x) = x^3 + tx - 1$.

1. Démontrer que le polynôme P_t admet une unique racine réelle que l'on notera $u(t)$.
2. On note u l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ qui, à tout réel positif t , associe le réel $u(t)$.

(a) Montrer que $u(\mathbb{R}_+) \subset]0, 1]$

(b) Montrer que la fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Déterminer la limite de u en $+\infty$. (Utiliser l'expression de $P_t(u(t))$).

(d) Montrer que l'application u est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0, 1]$ de réciproque :

$$v :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad y \mapsto \frac{1 - y^3}{y}.$$

(e) Représenter graphiquement grâce au langage Python la fonction v sur $]0, 1]$. En déduire le tracé de représentation graphique de la fonction u .

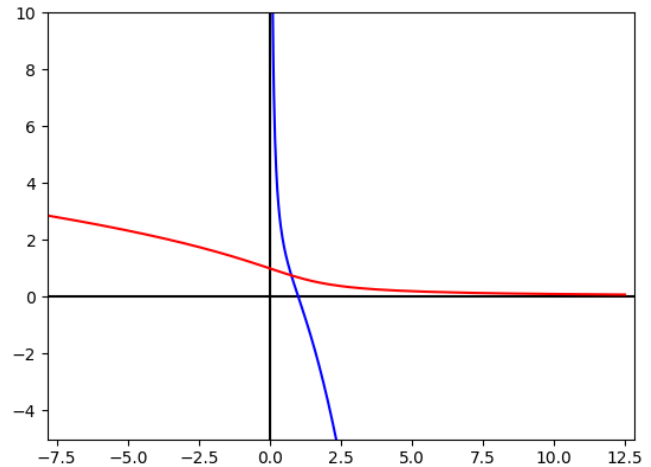
(f) Justifier que la fonction u est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(g) Démontrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis déterminer l'expression de $u'(t)$ en fonction de $u(t)$.

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.axis('equal')
plt.axis([-5,10,-5,10])
plt.axhline(color='k') # axe des x
plt.axvline(color='k') # axe des y

Y=[j/50 for j in range(4,204)]
X=[1/y-y**2 for y in Y]
plt.plot(Y,X,color='b')
plt.plot(X,Y,color='r')
plt.show()
```



Exercice 8. Soit n un entier naturel non nul et $x_1, \dots, x_n$ n réels de l'intervalle $]0, 1[$.

On définit les quantités suivantes :

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \bar{A}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 - x_k), \quad G_n = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \bar{G}_n = \left(\prod_{k=1}^n (1 - x_k) \right)^{\frac{1}{n}}$$

1. Calculer A_2 et G_2 . Montrer l'égalité suivante : $\sqrt{1 - 2A_2 + G_2^2} = \bar{G}_2$.
2. Montrer que $G_2 \leq A_2$.

3. Écrire une fonction Python qui calcule et renvoie les deux quotients : $\frac{G_n}{A_n}$ et $\frac{\bar{G}_n}{\bar{A}_n}$.

4. Soit f une fonction définie sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, deux fois dérivable sur cet intervalle et vérifiant $f'' \geq 0$.

(a) Soit $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall t \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad f(t) \geq f(a) + (t-a)f'(a)$$

(b) On définit f par $\forall t \in \left]0, \frac{1}{2}\right], f(t) = \ln \frac{1-t}{t}$. Montrer que f vérifie les hypothèses du a).

(c) On suppose que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. Montrer que $\ln(\overline{G_n}) - \ln(G_n) \geq 2(\overline{A_n} - A_n)$

Exercice 9. Soit f l'application de $] -1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + \ln(x+1)$.

1. Montrer que f est bijective. On note φ son inverse. Dresser le tableau de variations de φ .
2. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Trouver le développement limité de φ à l'ordre 2 en 0.
3. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi(t) - \sqrt{t})$.

Donner l'allure de la courbe représentative de φ et tracer avec Python.

```
def fon(x): return x**2+log(x+1)

import matplotlib.pyplot as plt
from math import log

X=[-1+j/20 for j in range(1,100)]
Y=[fon(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.plot(Y,X)
plt.show()
```

Exercice 10. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$.

Exercice 11. Trouver un équivalent en ∞ de $x^2 \ln \left(2 + \frac{1}{x}\right) - ax^2 - bx - c$.