Algèbre linéaire : Rappels 2018-2019

1. Soient $F = \{(a-b, 2a+3b, b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \{(0, 5c, c),\ c \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $F \bigcap G$.

   Même question avec : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x+2y+z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}\}$.

2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, distincts et de dimension 2 (plans vectoriels). Déterminer la dimension de $F \bigcap G$.

   Soit $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad ax+by+cz=0\}$, où a, b, c sont trois réels non tous nuls. Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? $ax+by+cz=0$ est appelée équation de ce plan.

3. (a) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1 et u_2 et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1 et v_2. Déterminer $F \bigcap G$ lorsque $u_1 = (0,2,5)$, $u_2 = (-1,0,2)$, $v_1 = (3,4,4)$, $v_2 = (2,2,1)$. Donner une équation de F.

   (b) Même question lorsque $u_1 = (3,-1,-1)$, $u_2 = (1,-1,-1)$, $v_1 = (2,1,-1)$, $v_2 = (1,2,1)$.

4. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 3x+4y-t=0\}$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = t\}$. Donner une base de F, G et $F \bigcap G$.

5. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner la dimension de F et indiquer une base de F.

6. k étant un entier naturel, on pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = \cos^k x$. Montrer que la famille $(f_0, f_1, ... f_n)$ est libre.

7. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer A^n pour tout entier n.

   (b) On considère les suites (a_n), (b_n), (c_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par la donnée de a_1, b_1 et c_1 réels et

   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \\ c_{n+1} = b_n + 2c_n \end{cases}$ Donner les expressions de a_n, b_n, c_n en fonction de a_1, b_1, c_1 et de n.

8. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 & 1/a^3 \\ a & 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a^2 & a & 0 & 1/a \\ a^3 & a^2 & a & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Calculer A^2, montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et de I

   (b) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

   (c) Montrer qu'il existe a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$. Que peut-on dire de la suite $(a_n - b_n)$

   (d) Soit $c_n = (-1)^n b_n$, trouver une relation de récurrence entre c_{n+1} et c_n, en déduire A^n.

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - 3I$

   (a) Déterminer un réel α tel que $B^2 = \alpha B$ et exprimer B^kpour tout entier naturel k.

   (b) Calculer, pour tout entier naturel n, A^n en fonction de A et I.

   (c) On appelle C_n la matrice obtenue en remplaçant n par $-n$ dans A^n. Cette matrice est-elle l'inverse de A^n ?

10. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(x,y,z) = (2x+y, y+z)$.

    Montrer que f est linéaire, trouver son noyau et son image.

11. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même telle que $f(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

    Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$.

    Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f et donner une base de ces sous-espaces vectoriels. Vérifier que la juxtaposition des vecteurs de ces bases est une base de $\mathbb{R}$. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

12. Soit E un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ muni d'une base (e_1, e_2, e_3, e_4). On considère l'endomorphisme f de E défini par : $f(e_1) = -e_1 + e_2$, $f(e_2) = -2e_1 + e_2$, $f(e_3) = -2e_1 + e_2 - e_3 + e_4$, $f(e_4) = -2e_1 + 2e_2 - 2e_3 + e_4$.

    Calculer $f \circ f$. f est-elle bijective ? Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par (e_1, e_2). Montrer que $f(F) = F$.

13. Soit les vecteurs : $\begin{cases} i = (1,0,0) \quad j = (0,1,0) \quad k = (0,0,1) \quad l = (-1,3,16) \\ I = (1,2,3) \quad J = (2,0,4) \quad K = (0,2,1) \quad L = (4,7,32) \end{cases}$.

(a) Peut-on trouver une application linéaire f telle que : $f(i)=I, f(j)=J, f(k)=K, f(l)=L$?

(b) Peut-on trouver une application linéaire g telle que : $g(i)=I, g(j)=J, g(k)=K$?

(c) Si oui trouver leurs noyaux et leurs images. Déterminer leur intersection.

14. E est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(\vec{i})=-\vec{j}-\vec{k}$, $f(\vec{j})=-\vec{i}-\vec{k}$, $f(\vec{k})=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$. Donner une base de son noyau, de son image. Vérifier que la juxtaposition des vecteurs de ces bases est une base de $\mathbb{R}$. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

15. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. A est la matrice de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dans sa base canonique.

(a) Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

(b) Montrer que pour tout x non dans $\ker f^2$, $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

(c) Résoudre $AM=0$ où M est une matrice (3,3). Résoudre $AM=B$.

16. La matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ représente f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(a) Expliciter M^k pour tout $k \geqslant 2$.

(b) M est-elle inversible ? Décrire l'image et le noyau de f.

17. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$) dont la matrice dans la base canonique est $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Donner une base de l'image de f. Quelle est la dimension du noyau de f ? Déterminer $\ker f$.

(b) On pose $v_1=e_1+\cdots+e_n$, $v_2=e_1+e_n$ et $F=\operatorname{vect}(v_1,v_2)$. Justifier que (v_1,v_2) est une base de F et que l'application g définie par $\forall x \in F,\ g(x)=f(x)$ est un endomorphisme de F. Quelle est la matrice de g dans la base (v_1,v_2) ?

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel réel de dimension $2n$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f=0$ et il existe une famille de n vecteurs de E $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ tels que la famille $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$ soit une famille libre de E.

(a) Montrer que $\operatorname{rang}(f) \geqslant n$ et que la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est libre.

(b) Montrer que $\operatorname{Im} f=\ker f$.

(c) Montrer que $(u_1, u_2, \dots, u_n, f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$ est une base de E.

19. Soit T l'application définie sur $\mathbb{R}_4[X]$ par : $T(P)=X^2P''-3XP'+3P$.

Montrer que T est un endomorphisme. Déterminer son noyau et son image.

Résoudre dans $\mathbb{R}_4[X]$: $X^2P''-3XP'+3P=6X^4+2X^2+\lambda X+3$.

20. Soit f qui un polynôme à coefficients réels associe $(4X+1)P(X)-(X+1)(X-2)P^{'}(X)$.

(a) Comparer le degré de P et le degré de $f(P)$.

(b) Montrer qu'il existe un unique entier n tel que la restriction de f à $\mathbb{R}_n[X]$ soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ noté φ.

(c) Trouver le noyau de φ.

(d) Montrer que $(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3))$ est une base de l'image de φ.

21. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3 où

$f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, $f_2 : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$, $f_3 : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$

(a) Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de F. On la notera $\mathscr{B}$.

(b) A toute fonction f de F on associe la fonction définie par $\Phi(f)=f'$.
Montrer que Φ est un endomorphisme de F puis écrire la matrice A de Φ relativement à la base $\mathscr{B}$.

(c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (On pourra écrire $A=-I_3+J$).

Réduction des endomorphismes 2018-2019

Exercice 1. On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est semblable à D.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D^n est combinaison linéaire de D et D^2.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A est-elle diagonalisable ? Diagonaliser.

Exercice 3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ? Si oui diagonaliser. A est-elle inversible ? Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ? Inversible ?
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Calculer T^n pour n entier naturel non nul et en déduire A^n.

Exercice 5. On définit la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Écrire une fonction permettant de calculer $M(a)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. La matrice est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
4. Diagonaliser $M(a)$ selon les valeurs de a
5. On suppose dans cette question que $a = -2$
   $(M(a)^3, M(a))$ est-elle une famille libre ? En déduire $M(a)^{2n+1}$ puis M^{2n+2} pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. 1. Montrer que les vecteurs $U = (u_1, u_2, u_3)$ et $V = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ sont colinéaires si et seulement si :
$u_1 v_2 - u_2 v_1 = u_1 v_3 - u_3 v_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 = 0$.

2. Créer une fonction booléenne `testcolinearite` qui vérifie que deux vecteurs sont colinéaires.

```
def TestColinerite(u,v):
    return u[0]*v[1]-u[1]*v[0]==0 and u[0]*v[2]-u[2]*v[0]==0 and u[1]*v[2]-u[2]*v[1]==0
```

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que les vecteurs $(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$ sont vecteurs propres de A. Démonter que 1,-3 sont valeurs propres de B. Ces deux matrices sont-elles diagonalisables ?
4. (a) Écrire un programme Python permettant de déterminer le nombre de vecteurs propres de A (respectivement B) dont les coefficients sont des entiers compris entre -10 et 10 (bornes incluses).
   (b) Pour N un entier naturel non nul, calculer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre $-N$ et N (bornes incluses).

```python
def NbVNonNulsCol(V,N):
    n=0
    for i in range(-N,N+1):
        for j in range(-N,N+1):
            for k in range(-N,N+1):
                n+=TestColinerite(V,[i,j,k])
    return n-1

N=10

V1,V2,V3=(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)  #base de vecteurs propres de A
nbA=NbVNonNulsCol(V1,N)+NbVNonNulsCol(V2,N)+NbVNonNulsCol(V3,N)
print(nbA)
```

```python
def NbVNonNulsPlan(a,b,c,N):
    n=0
    for i in range(-N,N+1):
        for j in range(-N,N+1):
            for k in range(-N,N+1):
                n+=(a*i+b*j+c*k==0)
    return n-1

a,b,c=1,-2,1 ; V=(1,2,-1) #Plan propre et vecteur propre pour B
nbB=NbVNonNulsPlan(a,b,c,N)+NbVNonNulsCol(V,N)
print(nbB)
```

Exercice 7. On veut étudier la suite (u_n) définie par ses trois premiers termes réels u_0, u_1, u_2 et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire une fonction en `Python` prenant en argument u_0, u_1, u_2 et renvoyant la liste des 100 premiers termes de la suite.

```python
def CalculU(u0,u1,u2,N):
    L=[u0,u1,u2]
    for k in range(3,N+1):
        u0,u1,u2=u1,u2,2*u2+u1-2*u0
        L.append(u2)
    return L
```

2. Démontrer que 0 n'est pas valeur propre de A.
3. Démontrer que, pour tout nombre complexe λ, λ est valeur propre de A si et seulement si λ est solution de l'équation : $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.
4. A est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonaliser.
5. Pour tout entier naturel n, exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et A. En déduire une expression de X_n en fonction de n, A et X_0.
6. Démontrer alors qu'il existe trois nombres complexes (a, b, c) (que l'on ne demande pas d'expliciter) tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b(-1)^n + c2^n$.

Exercice 8. On pose $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.
2. Montrer que 1 est valeur propre. A est-elle diagonalisable ?
3. On suppose $a + b \neq 0$. On pose $P = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$ et $Q = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$.

   Calculer P^2, Q^2, PQ, QP. Montrer que $A = P + (1-a-b)Q$.
4. Exprimer A^n en fonction de a, b, n. Que peut-on dire des coefficients de A^n quand n tend vers $+\infty$?

5. On suppose maintenant que $0 \leqslant a+b<1$.

   Montrer que, pour tout n entier naturel, il existe une matrice R telle que l'on ait $R^n = A$.

   Trouver une matrice R telle que $R^3 = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Exercice 9. Soit $\mathscr{A} = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $(M+I)(M+2I) = 0_2\}$

1. Soit $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $M \in \mathscr{A}$. Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
2. On considère à présent une matrice M quelconque appartenant à $\mathscr{A}$.

   Montrer que si λ est valeur propre de M, $\lambda \in \{-1,-2\}$. Que dire de M si -1 et -2 sont toutes deux valeurs propres de M ? Est-il possible que ni -1 ni -2 ne soit valeur propre de M ?

   On suppose que -1 est la seule valeur propre de M. Montrer que $M = -I$. Conclure quant à l'ensemble $\mathscr{A}$.

Exercice 10. On considère les réactions chimiques entre trois composés A, B, C. Les concentrations à la date t sont notées $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \\ C(t) \end{pmatrix}$. L'évolution du système est représentée par le système différentiel : $X'(t) = MX(t)$ avec $M = \begin{pmatrix} -k_1-k_2 & k_{-1} & k_{-2} \\ k_1 & -k_{-1} & 0 \\ k_2 & 0 & -k_{-2} \end{pmatrix}$ où les constantes k_1, k_2, k_{-1}, k_{-2} sont des constantes de réaction. Au départ les concentrations sont $A(0) = 10, \quad B(0) = C(0) = 0$

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

1. (a) Vérifier que 0 est valeur propre de f.
   (b) Trouver α et β réels pour que le vecteur $(1, \alpha, \beta)$ soit vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.
   (c) Démontrer que f admet pour valeurs propres réelles λ_1, λ_2,λ_3 avec : $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 = 0$ En déduire que f est diagonalisable.
2. On prend $k_1 = 0.2, k_2 = 0.1, k_{-1} = 0.05, k_{-2} = 0.01$. Construire en Python la matrice M.

   Déterminer numériquement une matrice D diagonale et P inversible telles que : $M = PDP^{-1}$. Utiliser `numpy.linalg.eig`.
3. On pose $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$ en tenant compte de la précision de Python. Utiliser `numpy.linalg.inv`.
   (b) Que représente $Y(t)$? Montrer que $Y'(t) = P^{-1}X(t)$ et que $Y'(t) = DY(t)$.
   (c) Déterminer $Y(t)$ en fonction de t et des λ_i.
   (d) Déterminer les limites de y_1 et y_2 quand t tend vers $+\infty$. Déterminer la limite de y_3. Vers quoi tendent A, B,C ?

```
import numpy as np
from numpy.linalg import eig,inv
M=np.array([[-0.3,0.05,0.01],[0.2,-0.05,0],[0.1,0,-0.01]])
VP,P=eig(M)
invP=inv(P)
print('valeurs propres=') ; print(VP)
print('P=') ; print(P) ; print('invP=') ; print(inv(P))
Y0=np.dot(invP,[10,0,0])
print('Y0=',Y0)
print('limX=',np.dot(P,[0,0,Y0[2]]))
```

```
valeurs propres=
[ -3.37797338e-01  -2.22026616e-02
1.21825049e-17]
P=
[[ -8.61618664    0.98773374    1.00000003]
 [  5.98767639    7.10667851    4.00000012]
 [  2.62851025   -8.09441224   10.00000029]]
invP=
[[-1.11092349   0.19300448   0.03389056]
 [ 0.53012237   0.95354879  -0.43443175]
 [ 0.72111026   0.72111026   0.72111026]]
Y0= [-11.10923489    5.30122368    7.21110255]
limX= [ 0.66666667   2.66666667   6.66666667]
```

Exercice 11. On pose pour tout réel t : $f_1(t) = \mathrm{e}^t$, $f_2(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{3}t}{2})$ et $f_3(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\sin(\frac{\sqrt{3}t}{2})$ et on appelle F le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$ engendré par $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.
2. On considère l'application définie sur F par $D : f \to f'$. Montrer que D est un endomorphisme de F. Donner la matrice de D dans la base $\mathscr{B}$.
3. Trouver une base de $\ker(D^2 + D + I)$. D est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? Dans $\mathbb{R}$?

Exercice 12. On considère $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$. Soit u l'endomorphisme de E défini par : $u(e_1) = u(e_n) = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots, +e_n$ et pour tout $i \in [\![2, n-1]\!]$, $u(e_i) = e_n$.

1. Donner une base de $\mathrm{Im}u$. u est-il inversible ? Donner une base du sous espace propre associé à la valeur propre 0.
2. Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ non nulle. Montrer que x appartient à l'image de u.
3. En déduire les sous espaces propres de u associés aux valeurs propres non nulles. u est-il diagonalisable ?