

Variables aléatoires réelles admettant une densité

1 Densité de probabilité

Définition 1.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si :

1. f est continue sauf peut-être en un nombre fini de points.
2. f est positive.
3. L'intégrale de f converge sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Définition 2.

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de fonction de répartition F_X . On dit que X admet une densité si

il existe une fonction densité de probabilité f telle que $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

La fonction f , qui n'est pas unique, est appelée densité de la variable aléatoire X .

On dit que X est à valeurs dans I si f est nulle en dehors de I .

Remarque : Si f est continue en x , alors F_X est dérivable en x et $F_X'(x) = f(x)$.

Théorème 1. (admis)

1. La variable aléatoire X admet une densité si et seulement si sa fonction de répartition F_X vérifie :
 - (a) F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et admet, sauf peut-être en un nombre fini de points, une dérivée continue.
 - (b) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
 - (c) $\lim_{-\infty} F_X = 0$ et $\lim_{+\infty} F_X = 1$.
2. Si f est une fonction densité de probabilité, alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité.

Proposition 1.

Soient X une variable aléatoire réelle de densité f , un réel a et I un intervalle. Alors :

1. $P(X = a) = 0$. (admis)
2. $P(X \in I) = \int_I f(t) dt$.

Fonctions de variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et u une fonction réelle de variable réelle, dont l'ensemble de définition contient $X(\Omega)$, continue. On admet que $Y = u(X)$ est une variable aléatoire. Si X admet une densité f , pour déterminer la loi de $Z = u(X)$ on cherche en général sa fonction de répartition F_Y .

$\forall y \in \mathbb{R}, F_Y(y) = P(u(X) \leq y) = \dots$

2 Espérance d'une variable aléatoire admettant une densité

Définition 3.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f .

On dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ est absolument convergente.

On appelle alors espérance de X le réel : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$.

Théorème 2. de transfert (admis)

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f .

Soit u une fonction réelle de variable réelle dont l'ensemble de définition contient $X(\Omega)$, continue.

$u(X)$ a une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) f(t) dt$ est absolument convergente.

Si $u(X)$ a une espérance, alors $E(u(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) f(t) dt$.

Théorème 3. (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire à densité, positive et ayant une espérance. Alors $\forall \varepsilon > 0, P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$

3 Lois usuelles

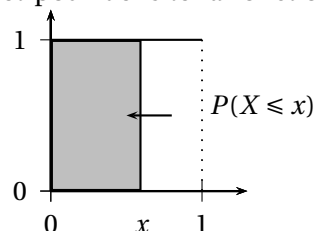
X est une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3.1 Loi uniforme

Définition 4.

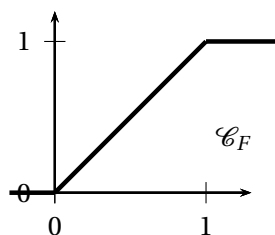
On dit que X suit une loi uniforme sur le segment $[a, b]$ si X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b], f(x) = \frac{1}{b-a} \\ \forall x \notin [a, b], f(x) = 0 \end{cases}$$



Fonction de répartition F

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, a[, F(x) = 0 \\ \forall x \in [a, b], F(x) = \frac{x-a}{b-a} \\ \forall x \in [b, +\infty[, F(x) = 1 \end{cases}$$



Proposition 2.

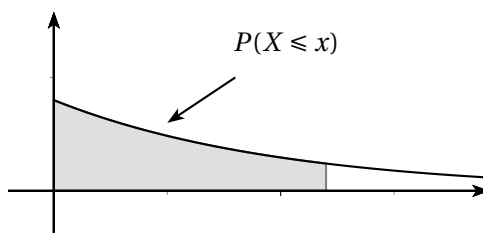
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

3.2 Loi exponentielle

Définition 5.

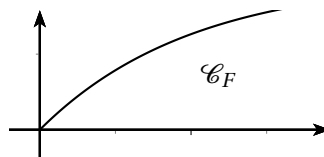
On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre le réel strictement positif λ si X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[, f(x) = 0 \\ \forall x \in [0, +\infty[, f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{cases}$$



Fonction de répartition F

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[, F(x) = 0 \\ \forall x \in [0, +\infty[, F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \end{cases}$$



Proposition 3.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Proposition 4. (Invariance temporelle)

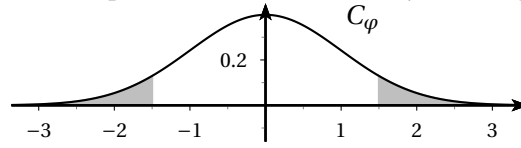
Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\forall (s, t) \in (\mathbb{R}_+)^2, P(X \geq s+t | X \geq s) = P(X \geq t)$

3.3 Loi normale (loi de Laplace-Gauss)

Définition 6.

On dit que X suit une loi normale de paramètres $(0, 1)$ si X admet pour densité la fonction φ définie par :

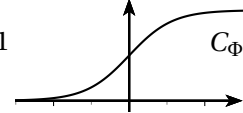
$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$



Fonction de répartition Φ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) + \Phi(-x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt + \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt + \int_x^{+\infty} \varphi(u) du = 1$$

(on a posé $u = -t$)



Si X suit une loi normale de paramètres $(0, 1)$, alors $-X$ suit aussi la même loi.

Proposition 5.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, alors $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$. On dit aussi que X suit une loi normale centrée réduite.

Définition 7.

On dit que X suit une loi normale de paramètres (m, σ^2) si la variable aléatoire $X^* = \frac{X - m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

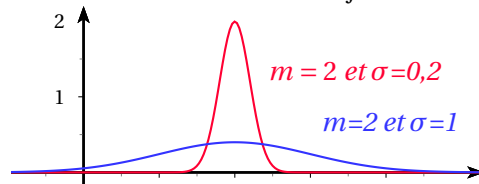
Proposition 6.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.

Proposition 7.

X suit une loi normale de paramètres (m, σ^2) si et seulement si X admet comme densité la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_{m, \sigma^2}(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$



Proposition 8.

Si X suit une loi normale de paramètres (m, σ^2) alors $aX + b$ suit une loi normale de paramètres $(am + b, a^2\sigma^2)$.

4 Somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes

4.1 Densité

Théorème 4. (admis)

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_X et f_Y , alors $X + Y$ est une variable aléatoire ayant pour densité la fonction h définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t-y) f_Y(y) dy. \text{ C'est le produit de convolution de } f_X \text{ et } f_Y.$$

4.2 Somme de deux variables aléatoires normales indépendantes

Théorème 5.

- Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales de paramètres (m_1, σ_1^2) et (m_2, σ_2^2) . Alors $X + Y$ est une variable aléatoire normale de paramètres $(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
- Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales de paramètres $(m_1, \sigma_1^2), \dots, (m_n, \sigma_n^2)$. Alors $X_1 + \dots + X_n$ est une variable aléatoire normale de paramètres $(m_1 + \dots + m_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$.

5 Théorèmes limites

Théorème 6. Inégalité de Bienaymé Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant une espérance m et un écart type σ . Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Théorème 7. Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires deux à deux indépendantes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de même espérance m et de même variance σ^2 . Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Théorème 8. Théorème central limite (admis)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, de même loi, admettant une espérance m et une variance σ^2 .

On pose :

$$M_n = \overline{X_n} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \quad \text{et} \quad M_n^* = \frac{M_n - E(M_n)}{\sigma(M_n)} = \frac{M_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{(X_1 + \dots + X_n) - nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

Alors quels que soient les réels a et b tels que $a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a < M_n^* \leq b) = \int_a^b \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

En général on ne connaît pas σ . On a un résultat analogue en remplaçant σ^2 par l'estimateur de la variance

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2.$$

Application à la loi binomiale : Théorème de Moivre Laplace

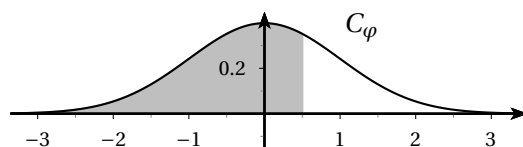
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de même paramètre p .

Alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

Si n est "grand", $X_1 + \dots + X_n$ suit approximativement une loi normale de paramètres (np, npq) .

En pratique on confond $\mathcal{B}(n, p)$ avec $\mathcal{N}(np, npq)$ pour $n \geq 30$ et $np \geq 0.1$ et $n(1-p) \geq 0.1$.

FUNCTION DE RÉPARTITION DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE



t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50398	0,50797	0,51196	0,51595	0,51993	0,52392	0,5279	0,53188	0,53585
0,1	0,53982	0,54379	0,54775	0,55171	0,55567	0,55961	0,56355	0,56749	0,57142	0,57534
0,2	0,57925	0,58316	0,58706	0,59095	0,59483	0,5987	0,60256	0,60641	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62171	0,62551	0,6293	0,63307	0,63683	0,64057	0,6443	0,64802	0,65173
0,4	0,65542	0,65909	0,66275	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68438	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69846	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72574	0,72906	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75174	0,7549
0,7	0,75803	0,76114	0,76423	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78523
0,8	0,78814	0,79102	0,79389	0,79673	0,79954	0,80233	0,8051	0,80784	0,81057	0,81326
0,9	0,81593	0,81858	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83397	0,83645	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84613	0,84849	0,85083	0,85314	0,85542	0,85769	0,85992	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87285	0,87492	0,87697	0,87899	0,88099	0,88297
1,2	0,88493	0,88686	0,88876	0,89065	0,89251	0,89435	0,89616	0,89795	0,89972	0,90147
1,3	0,90319	0,9049	0,90658	0,90824	0,90987	0,91149	0,91308	0,91465	0,9162	0,91773
1,4	0,91924	0,92073	0,92219	0,92364	0,92506	0,92647	0,92785	0,92921	0,93056	0,93188
1,5	0,93319	0,93447	0,93574	0,93699	0,93821	0,93942	0,94062	0,94179	0,94294	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94844	0,94949	0,95052	0,95154	0,95254	0,95352	0,95448
1,7	0,95543	0,95636	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96079	0,96163	0,96246	0,96327
1,8	0,96406	0,96485	0,96562	0,96637	0,96711	0,96784	0,96855	0,96925	0,96994	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97319	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97614	0,9767
2	0,97724	0,97778	0,9783	0,97882	0,97932	0,97981	0,9803	0,98077	0,98123	0,98169
2,1	0,98213	0,98257	0,98299	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98499	0,98537	0,98573
2,2	0,98609	0,98644	0,98679	0,98712	0,98745	0,98777	0,98808	0,98839	0,98869	0,98898
2,3	0,98927	0,98955	0,98982	0,99009	0,99035	0,99061	0,99086	0,9911	0,99134	0,99157
2,4	0,9918	0,99202	0,99223	0,99245	0,99265	0,99285	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99429	0,99445	0,99461	0,99476	0,99491	0,99505	0,9952
2,6	0,99533	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99597	0,99609	0,9962	0,99631	0,99642
2,7	0,99653	0,99663	0,99673	0,99683	0,99692	0,99702	0,9971	0,99719	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99759	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99794	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99824	0,9983	0,99835	0,99841	0,99846	0,99851	0,99855	0,9986
3	0,99865	0,99869	0,99873	0,99877	0,99881	0,99885	0,99889	0,99892	0,99896	0,99899
3,1	0,99903	0,99906	0,99909	0,99912	0,99915	0,99918	0,99921	0,99923	0,99926	0,99928
3,2	0,99931	0,99933	0,99935	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99949
3,3	0,99951	0,99953	0,99954	0,99956	0,99958	0,99959	0,99961	0,99962	0,99963	0,99965