Probabilités

1 Espace de probabilité

1.1 Probabilité

Définition 1.
On appelle **expérience aléatoire** (ou épreuve) une expérience dont le résultat est soumis au hasard.
On appelle **univers** l'ensemble Ω de tous les résultats de l'expérience aléatoire.

Définition 2.
Une tribu (ou σ-algèbre) $\mathscr{A}$ sur Ω est une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$ contenant Ω, stable par passage au complémentaire et réunion dénombrable :

- $\Omega \in \mathscr{A}$;
- $\forall A \in \mathscr{A}$, $\overline{A} \in \mathscr{A}$;
- Pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathscr{A}$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés **événements**.
Si Ω es fini $\mathscr{A}$ est souvent égal à l'ensemble des parties de Ω.
Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé espace probabilisable.

L'ensemble Ω est appelé événement **certain** et l'ensemble $\emptyset$ est appelé événement **impossible**.
Si la partie A est incluse dans la partie B on dit que A **implique** B : $A \subset B$.
Un singleton $\{\omega\}$ est appelé événement **élémentaire**.
Le complémentaire d'un événement A est appelé événement **contraire** : $\overline{A}$.
Les événements A et B disjoints sont appelées événements **incompatibles** : $A \cap B = \emptyset$.
Une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements est un **système complet** si les A_n sont deux à deux incompatibles et leur réunion est égale à Ω : Pour $i \neq j$, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$.

Définition 3.
Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application P de $\mathscr{A}$ dans $[0,1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles :
   la série $\sum P(A_n)$ converge et $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$. C'est la propriété de **σ-additivité** de la probabilité P.

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est appelé espace de probabilité ou espace probabilisé.

Propriétés 1.

1. *$P(\emptyset) = 0$.*
2. *Si $A_1, ..., A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.*
3. *Soit un événement A : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.*
4. *Soient A et B deux événements tels que A implique B : $A \subset B$.*
   Alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$. Donc $P(A) \leqslant P(B)$ et l'application P est croissante.
5. *Soient A et B deux événements. Alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.*

Définition 4.
Un événement A tel que $P(A) = 1$ est appelé **presque certain**.
Un événement A tel que $P(A) = 0$ est appelé **presque impossible**.
Une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements est un **système quasi-complet** si les A_n sont deux à deux incompatibles et leur réunion est presque certaine : Pour $i \neq j$, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ et $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = 1$.

Théorème 1. *Cas d'un ensemble discret (càd fini ou dénombrable)*
Soit $\Omega = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\}$. *Si* $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels positifs ou nuls telle que la série* $\sum p_i$ *converge et a pour somme 1, alors il existe une et une seule probabilité* P *sur* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ *telle que pour tout* $i \in \mathbb{N}$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$
Si $A = \{\omega_{i_1}, .., \omega_{i_k}, ...\}$, *alors :* $P(A) = \sum_k p_{i_k}$.

Définition 5. Un cas particulier important : l'équiprobabilité
Si l'univers Ω est fini, on dit qu'il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont même probabilité.
Soit $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$. Pour tout entier $k \in [1, n]$ on a : $P(\{\omega_k\}) = \dfrac{1}{n}$.

1.2 Dénombrement

Soit E un ensemble de cardinal n.

1. **p-listes, applications, tirages successifs**
   (a) Un élément de E^p est appelé p-liste de E.
   Une p-liste correspond à p tirages **avec** remise dans E, à une **application** de $\{1, ...p\}$ dans E.
   Il y a n choix pour le premier élément. Le premier étant choisi, il y a encore n choix pour le second etc.

   Il y a n^p p-listes de E.

   (b) Une p-liste de E est dite sans répétition lorsque ses éléments sont distincts deux à deux.
   Une p-liste de E sans répétition correspond à p tirages **sans** remise dans E, à une **injection** de $\{1, ...p\}$ dans E.
   Nécessairement $p \leqslant n$. Il y a n choix pour le premier élément. Le premier étant choisi, il ne reste que $n-1$ choix pour le second etc.

   Il y a $n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-listes de E sans répétition.

   Une liste de E contenant exactement une fois chaque élément de E est appelée une permutation de E.
   Il y a $n!$ permutations de E.
2. **p-combinaisons (parties), tirages simultanés**
   Une p-combinaison de E est une partie de E à p éléments.
   Une p-combinaison correspond à un tirage simultané de p éléments de E.
   Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n se note : $\binom{n}{p}$ ou C_n^p et se lit "p parmi n".
   Chaque p-combinaison de E peut être rangée de $p!$ façons, donc conduit à $p!$ p-listes distinctes.
   Propriétés 2. *Pour tout entier naturel n et tout entier p avec* $0 \leqslant p \leqslant n$ *:*

   $$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

   Le nombre de parties d'un ensemble de cardinal n est 2^n.

1.3 Probabilité conditionnelle

On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Définition 6.
Soit A un événement de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle en A, ou probabilité conditionnelle sachant que A est réalisé, l'application P_A définie par : $\forall B \in \mathscr{A},\ P_A(B) = P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Proposition 1. *P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.*

Proposition 2. ***Formule des probabilités composées***
Soient $A_1, ..., A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

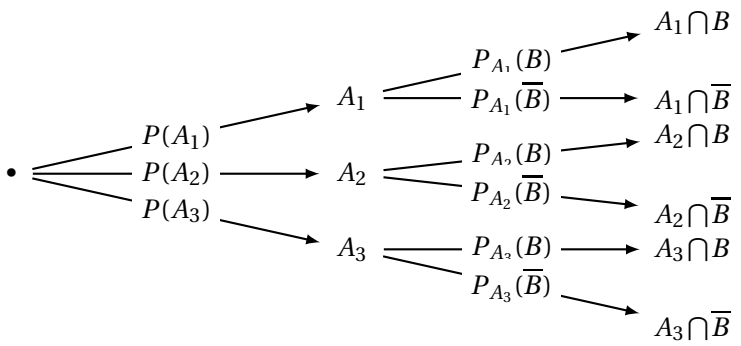
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Proposition 3. ***Formule des probabilités totales***
Soit (A_n) un système quasi-complet d'événements et un événement B. Alors : la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et

$$\boxed{P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(A_n) = 0$ posons par convention $P_{A_n}(B)P(A_n) = 0$. Alors :

$$\boxed{P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P(B|A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B)}$$



Proposition 4. ***Formule de Bayes***
Soient (A_n) un système complet d'événements et un événement B de probabilité non nulle. Alors :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ P_B(A_j) = \frac{P(A_j \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P_{A_j}(B)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B)}.$$

1.4 Événements indépendants

Définition 7. Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Les événements A et B sont appelés indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Les événements $A_1, ..., A_n$ sont mutuellement indépendants si pour toute partie I de $\{1, 2, ..., n\}$ on a :
$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.
La suite (A_n) est une suite d'événements indépendants, si $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A_0, \dots, A_n)$ sont mutuellement indépendants.

Propriétés 3.
Soit A un événement de probabilité non nulle. Les deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A) = P_B(A)$.

Variables aléatoires réelles

2 Variables aléatoires réelles

2.1 Définition-Fonction de répartition

Définition 8.
Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire réelle toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ est un événement.

Notations
Soit B une partie de $\mathbb{R}$. On pose : $(X \in B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$.
Si $a \in \mathbb{R}$ on pose : $(X = a) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = a\}$, $(X < a) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\}$,...
Si a et b sont deux réels tels que $a < b$ on pose : $(a < X \leqslant b) = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leqslant b\}$,...

Définition 9. Fonction de répartition
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On appelle fonction de répartition l'application F_X de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

Propriétés 4.

1. *F_X est continue à droite en tout point.*
2. *F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.*
3. $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$ *et* $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$.

Fonction de répartition d'un maximum et d'un minimum
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Alors $\max(X_1, \dots, X_n)$ et $\min(X_1, \dots, X_n)$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
• $P(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x \bigcap \dots \bigcap X_n \leqslant x)$
• $P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) = P(X_1 > x \bigcap \dots \bigcap X_n > x)$.

2.2 Variables aléatoires indépendantes

Définition 10.
On dit que deux variables aléatoires réelles X et Y sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont indépendantes si pour tous les intervalles I et J de $\mathbb{R}$ on a $P(X \in I \cap Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J)$.

Définition 11. : Généralisation
On dit que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont indépendantes mutuellement (dans leur ensemble) si pour tous les intervalles $I_1, \dots, I_n$ on a $P(X_1 \in I_1 \cap \dots \cap X_n \in I_n) = P(X_1 \in I_1) \dots P(X_n \in I_n)$
On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes si pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires $X_0, X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Proposition 5. *(admise)*
Soient $(X_1, \dots, X_n)$ n variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Alors :

1. *Toute sous-famille de cette famille est formée de variables aléatoires indépendantes.*
2. *Soient m et n deux entiers tels que $m < n$ et u et v deux applications réelles continues respectivement sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{n-m}$. Alors $u(X_1, \dots, X_m)$ et $v(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.*
3. *Si $u_1, \dots, u_n$ sont n applications réelles continues sur $\mathbb{R}$, alors les variables aléatoires $u_1(X_1), \dots, u_n(X_n)$ sont indépendantes.*

3 Moments d'une variable aléatoire réelle

3.1 Espérance

Théorème 2.
Il existe une fonction E appelée espérance définie sur un sous-ensemble de l'ensemble des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. *Si X et Y sont deux variables aléatoires ayant une espérance et a et b deux réels, alors $aX+bY$ a une espérance et $E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$. (linéarité)*
   Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires ayant une espérance, alors $X_1 + \cdots + X_n$ a une espérance et $E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$.
2. *Si X est une variable aléatoire positive ayant une espérance, alors $E(X) \geqslant 0$. (positivité)*
3. *La variable aléatoire certaine 1 admet une espérance et $E(1) = 1$.*

Définition 12.
Une variable aléatoire réelle admettant une espérance est dite **centrée** si son espérance est nulle.

Définition 13.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle moment d'ordre n l'espérance de X^n (si elle existe).

3.2 Variance, écart type

Définition 14.
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant une espérance.
On dit que X admet une variance si la variable aléatoire $[X - E(X)]^2$ admet une espérance.
On appelle alors variance de X le réel $V(X) = E([X - E(X)]^2)$.
On appelle écart-type de X le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition 6. *(Formule de Koenig-Huygens)*
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant une espérance.
Alors X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance.
On a de plus : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Proposition 7.
Soient X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant une variance et deux réels a, b. Alors la variable aléatoire $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Définition 15.
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant une variance.

1. X est dite réduite si $V(X) = 1$.
2. Si $V(X) \neq 0$, on appelle variable aléatoire centrée réduite associée à X la variable aléatoire : $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$.

Remarque $E(X^*) = 0$ et $V(X^*) = 1$. La variable aléatoire X^* est centrée et réduite.

3.3 Cas des variables aléatoires indépendantes

Théorème 3. *(admis)*
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et ayant une espérance. Alors XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Proposition 8.
Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et admettent une variance, alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance et : $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.
*Si les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** et admettent une variance, alors $X+Y$ admet une variance et : $V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$.*

Variables aléatoires réelles discrètes

4 Loi de probabilité

Définition 16.
On dit que la variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est discrète si l'ensemble de ses valeurs noté $X(\Omega)$ est indexé par une partie de $\mathbb{N}$.

Définition 17.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité. On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire réelle discrète X l'application $\begin{array}{rll} f_X : X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P(X = x) \end{array}$

Théorème 4.
Posons $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$. La famille $(X = x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) = 1$.

5 Moments d'une variable aléatoire discrète

5.1 Espérance

Définition 18.
Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on appelle espérance de X le réel : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$.
Si $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, on dit que X admet une espérance si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.
On appelle alors espérance de X le réel : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.

Théorème 5. ***de transfert*** *(admis)*
Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ avec $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$ et u une fonction réelle dont l'ensemble de définition contient $X(\Omega)$, continue.
Alors $u(X)$ est une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
$u(X)$ a une espérance si et seulement si la série $\sum u(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente.
Lorsque $u(X)$ a une espérance : $E(u(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(x_n)P(X = x_n)$.

Remarque : Il est inutile de connaître la loi de $u(X)$ pour calculer son espérance.

Propriétés 5.

1. *Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ayant une espérance. Soient a et b deux réels. Alors la variable aléatoire $aX + b$ admet une espérance et $E(aX + b) = aE(X) + b$. (On verra que E est linéaire).*
2. *Si X est une variable aléatoire réelle discrète positive, alors $E(X) \geqslant 0$.*
3. $E(1) = 1$.

Théorème 6. *(Inégalité de Markov)*
Soit X une variable aléatoire discrète, positive et ayant une espérance. Alors $\forall \varepsilon > 0,\ P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{E(X)}{\varepsilon}$

6 Lois usuelles

X est une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

6.1 Loi uniforme

Définition 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

Proposition 9. *Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.*

6.2 Loi de Bernoulli

Définition 20. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$.

Proposition 10. *Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.*

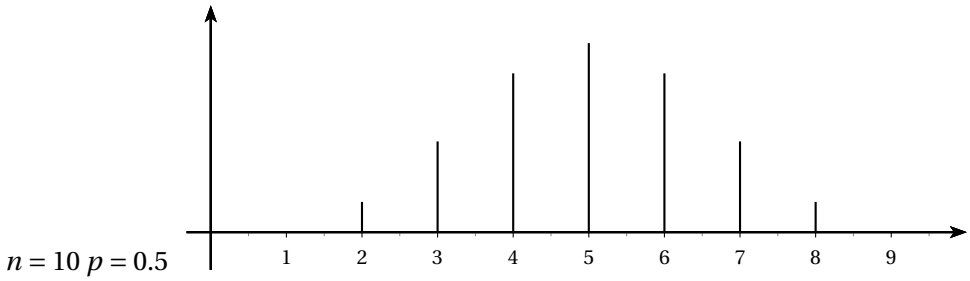
Exemple : Soit A un événement de Ω. On appelle fonction indicatrice de A la variable aléatoire qui vaut 1 si A est réalisé (succès) et 0 sinon (échec). On la note χ_A ou $\mathbb{1}_A$.
$\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = E(\mathbb{1}_A) = P(A)$

6.3 Loi binomiale

On appelle épreuve de Bernoulli une épreuve où deux résultats sont possibles : $\Omega = \{S, E\}$.
On considère n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On appelle X le nombre de succès obtenus.

Définition 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.
On dit que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) si :
$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Proposition 11. *Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.*



6.4 Loi hypergéométrique

On extrait au hasard et sans remise n boules d'une urne qui contient a boules blanches et b boules noires. On appelle X le nombre de boules blanches obtenues.

Définition 22.
On dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètres les entiers n, a, b si

$$X(\Omega) = [\![\max(0, n-b), \min(n, a)]\!] \text{ et } \forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = \frac{\dbinom{a}{k}\dbinom{b}{n-k}}{\dbinom{a+b}{n}}.$$

Proposition 12. *Si* $X \hookrightarrow \mathscr{H}(n,a,b)$, *alors* $E(X) = n\dfrac{a}{a+b}$.

Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale

X désigne le nombre de boules blanches extraites simultanément d'une urne contenant a boules blanches et b boules noires.

Lorsque a et b sont « grands » : $\forall k \in [\![\max(0,n-b),\min(n,a)]\!]$: $P(X=k) = \dfrac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}} \approx \binom{n}{k}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^k\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^{n-k}$.

Dans un tirage sans remise, si le nombre de boules tirées est petit par rapport au nombre de boules de l'urne, les tirages ne modifient pas sensiblement la composition de l'urne. Tout se passe comme si les tirages étaient faits avec remise.

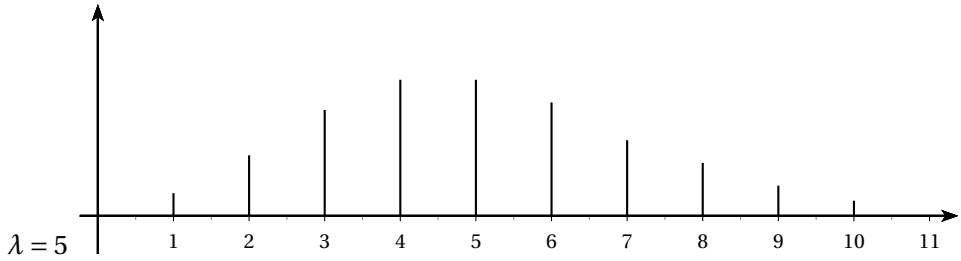
Dans la pratique on confond une loi hypergéométrique de paramètres n, a, b avec une loi binomiale de paramètres $\left(n, \dfrac{a}{a+b}\right)$ pour $a+b \geqslant 10n$.

6.5 Loi de Poisson

Définition 23. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$ si :

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Proposition 13. *Si* $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, *alors* $E(X) = \lambda$ *et* $V(X) = \lambda$.



Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

X désigne le nombre de boules blanches extraites avec remise d'une urne contenant une proportion p de boules blanches.

Lorsque n est « grand » et p « petit » tels que $np = \lambda$: $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \approx \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

Dans la pratique on confond une loi binomiale de paramètres (n,p) avec une loi de Poisson de paramètre np pour $n \geqslant 30$ et $p \leqslant \dfrac{1}{10}$.

6.6 Loi géométrique

On étudie un jeu de pile et face de durée infinie. On appelle X le rang d'apparition du premier « pile ».

Définition 24.

On dit que X suit une loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$ si

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = q^{k-1}p$. (avec $q = 1-p$)

Proposition 14. *Si* $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, *à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$, *alors* $E(X) = \dfrac{1}{p}$ *et* $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

Proposition 15. *(Propriété d'invariance temporelle)*

Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, *alors* $\forall (j,k)(\in \mathbb{N}^*)^2$, $P(X > j+k | X > j) = P(X > k)$.

Couples discrets

7 Loi d'un couple de var discrètes

7.1 Loi conjointe

Définition 25.
On appelle couple de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ toute application $Z = (X, Y)$ de Ω dans $\mathbb{R}^2$ telle que X et Y sont des variables aléatoires réelles discrètes.
On appelle loi conjointe du couple l'application $\begin{array}{ll} f_Z : Z(\Omega) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto P(X = x \bigcap Y = y) \end{array}$

Théorème 7. *Posons $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n \ldots\}$ et $Y(\Omega) = \{y_0, \ldots, y_n \ldots\}$.*
La famille $(X = x_i \cap Y = y_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est un système complet d'événements. Donc $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} P(X = x_i \cap Y = y_j) = 1$.

7.2 Lois marginales

Définition 26.
Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Les lois marginales sont les lois de X et de Y.

Théorème 8.
On peut obtenir la loi de X et de Y à partir de la loi conjointe du couple.
Si on pose $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n \ldots\}$ et $Y(\Omega) = \{y_0, \ldots, y_n \ldots\}$. :
$\forall i \in \mathbb{N},\ P(X = x_i) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} P(X = x_i \cap Y = y_j)$ *et* $\forall j \in \mathbb{N},\ P(Y = y_j) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} P(X = x_i \cap Y = y_j)$.

Remarque
On ne peut en général pas calculer la loi de (X, Y) à partir des lois marginales.

7.3 Lois conditionnelles

Définition 27.
Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On pose $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n \ldots\}$ et $Y(\Omega) = \{y_0, \ldots, y_n \ldots\}$.
Pour tout $j \in \mathbb{N}$ tel que $P(Y = y_j) \neq 0$, on appelle loi conditionnelle de X sachant $Y = y_j$ l'application définie par :
$\forall x_i \in X(\Omega),\ P_{Y=y_j}(X = x_i) = P(X = x_i | Y = y_j) = \dfrac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$.

Remarque $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} P_{Y=y_j}(X = x_i) = \dfrac{1}{P(Y = y_j)} \sum\limits_{i=0}^{+\infty} P(X = x_i \cap Y = y_j) = 1$

7.4 Variables aléatoires réelles discrètes indépendantes

Propriétés 6.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
X et Y sont indépendantes si et seulement si $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

7.5 Somme de deux variables aléatoires réelles discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Alors $X + Y$ est une variable aléatoire (admis) à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ (X + Y = k) = \bigcup\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j=k} (X = i \cap Y = j)$.

Ces événements étant deux à deux incompatibles : $P(X + Y = k) = \sum\limits_{i=0}^{k} P(X = i \cap Y = k - i)$.

Si X et Y sont indépendantes : $P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)$.

Théorème 9. ***Somme de variables de Poisson indépendantes***
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ.
Alors $X+Y$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.
Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.
Alors $X_1+\cdots+X_n$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda_1+\cdots+\lambda_n$.

7.6 Propriétés de l'espérance et de la variance

7.6.1 Espérance d'une fonction de deux variables aléatoires

Théorème 10. ***de transfert*** *(admis)*
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ avec $X(\Omega)=\{x_0,\dots,x_n\dots\}$, $Y(\Omega)=\{y_0,\dots,y_n\dots\}$ et u une fonction réelle, positive, dont l'ensemble de définition contient $(X,Y)(\Omega)$, continue.
Alors $u(X,Y)$ est une variable aléatoire réelle discrète.
$u(X,Y)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u(x_i,y_j)P(X=x_i\cap Y=y_j)$ converge absolument.
Lorsque $u(X,Y)$ a une espérance, $E(u(X,Y))=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u(x_i,y_j)P(X=x_i\cap Y=y_j)$.

Remarque :
Il est inutile de connaître la loi de $u(X,Y)$ pour calculer son espérance.
Conséquence :
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes ayant une espérance.
Alors $X+Y$ admet une espérance et $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

7.6.2 Covariance

Proposition 16.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ ayant une variance.
Alors XY a une espérance (admis) et $X+Y$ admet une variance.
Donc la variable aléatoire $[X-E(X)][Y-E(Y)]$ a une espérance égale à $E(XY)-E(X)E(Y)$.

Définition 28.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ ayant une variance.
On appelle covariance de X et Y le réel : $\mathrm{cov}(X,Y)=E([X-E(X)][Y-E(Y)])=E(XY)-E(X)E(Y)$.
On appelle coefficient de corrélation linéaire le réel $\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

Théorème 11. *Propriétés de la covariance*
Quels que soient les réels $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2$, quelles que soient les variables aléatoires réelles discrètes X,X_1,X_2,Y,Y_1,Y_2 sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ ayant une variance :
$\mathrm{cov}(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2,Y)=\lambda_1\mathrm{cov}(X_1,Y)+\lambda_2\mathrm{cov}(X_2,Y)$
$\mathrm{cov}(X,\mu_1Y_1+\mu_2Y_2)=\mu_1\mathrm{cov}(X,Y_1)+\mu_2\mathrm{cov}(X,Y_2)$ *(covariance est bilinéaire).*
$\mathrm{cov}(Y,X)=\mathrm{cov}(X,Y)$ *(covariance est symétrique).*
$\mathrm{cov}(X,X)=V(X)\geqslant 0$ *(covariance est positive).*
$|\mathrm{cov}(X,Y)|\leqslant\sigma(X)\sigma(Y)$ *: (inégalité de Schwarz).*

Théorème 12.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ ayant une variance.
- *Alors $X+Y$ a une variance et : $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)$.*
- *Si X et Y sont **indépendantes**, alors $E(XY)=E(X)E(Y)$, donc $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.*