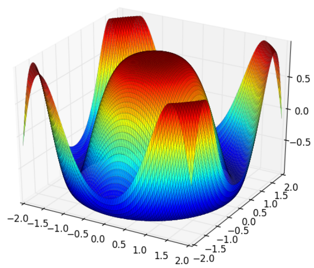
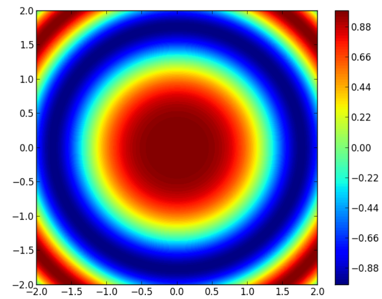
Fonctions de deux variables

Soit f une fonction de deux variables à valeurs réelles. On appelle **ligne de niveau** l'ensemble $\{(x,y) | f(x,y) = c\}$ avec c une constante.



$f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$



Lignes de niveau

1 Continuité

Définition
Soit f une fonction réelle définie sur un pavé ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et $u_0 = (x_0, y_0)$ un point de D.
f est continue en u_0 si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^\star, (|x - x_0| < \eta\ ,\ |y - y_0| < \eta) \Longrightarrow (|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon)$.

Théorème 1.
Soient f, g définies sur D, continues en u_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
$f+g, \lambda f, fg, \frac{f}{g}$ (si $g(u_0) \neq 0$) sont continues en u_0.
Soit φ une fonction réelle de variable réelle continue en $f(u_0)$. Alors $\varphi \circ f$ est continue en u_0.
Toute fonction polynôme de plusieurs variables est continue.

2 Applications partielles, dérivées partielles

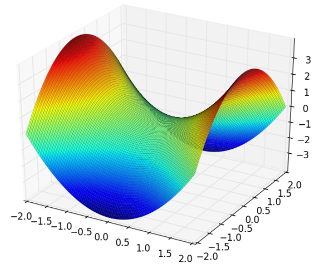
2.1 Dérivées partielles

Définition 1.

1. Soit f une fonction réelle définie sur un pavé ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et $u_0 = (x_0, y_0)$ un point de D.
   On appelle application partielle par rapport à la première variable en (x_0, y_0) l'application : $f_x : x \longmapsto f(x, y_0)$.
   On définit de même $f_y : y \longmapsto f(x_0, y)$.
2. Si f_x est derivable en x_0, on dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en (x_0, y_0). On note $f_x'(x_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
3. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe en tout point de D, on appelle fonction dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable la fonction : $\left\{ \begin{array}{llll} \dfrac{\partial f}{\partial x} : & D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \right.$.
   On définit de la même manière les dérivées par rapport à la deuxième variable.
   Si f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur D continues sur D, on dit que f est de classe C^1 sur D.

Théorème 2.
Les dérivées partielles d'une fonction définie sur un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$ s'annulent en tout point ou cette fonction admet un extremum (à condition qu'elles existent).

La réciproque est fausse. On peut avoir un "point selle".



$f(x,y) = x^2 - y^2$

Théorème 3.
Si f une est fonction réelle de classe C^1 définie sur un pavé ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in D$, alors il existe une fonction ε telle que :
$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + (|h|+|k|)\varepsilon(h,k)$ *avec* $\lim\limits_{(|h|+|k|)\to 0} \varepsilon(h,k) = 0.$

Définition 2.
Soit f une fonction réelle de classe C^1 définie sur un pavé ouvert D de $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On appelle **gradient** de f le vecteur :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\vec{\jmath}$$

2.2 Dérivées partielles d'ordre deux

Définition 3.
Soit f une fonction réelle de classe C^1 définie sur un pavé ouvert D de $\mathbb{R}^2$ admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur D.
Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet une dérivée partielle par rapport à x on la note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet une dérivée partielle par rapport à y on la note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admet une dérivée partielle par rapport à x on la note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admet une dérivée partielle par rapport à y on la note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Théorème 4 (de Schwarz)**.**
Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent sur D et sont continues, alors elles sont égales :

$$\forall (x,y) \in D\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

2.3 Dérivées partielles d'une fonction composée

Théorème 5.
Soit $\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) & \mapsto & f(x(t), y(t)) = F(t) \end{array}$
Si x et y sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ alors F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\,x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\,y'(t)$$