Équations différentielles

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Définition

Définition 1.
Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation du type :

$$(E) \quad y' + a(t)y = f(t)$$

où a et f sont des fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On appelle équation homogène associée à (E) l'équation :

$$(H) \quad y' + a(t)y = 0$$

On dit que la fonction φ est une solution de (E) sur I si φ est dérivable sur I et si :

$$\forall t \in I, \varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = f(t).$$

1.2 Résolution de l'équation homogène

On note A une primitive quelconque de la fonction continue a sur I.

Théorème 1.
L'ensemble des solutions de (H) sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.
Plus précisément, cet ensemble est : $\left\{t \longmapsto c\mathrm{e}^{-A(t)}; \quad c \in \mathbb{R}\right\}$

1.3 Résolution de l'équation avec second membre

Théorème 2.
Si φ_0 est une solution de (E) sur l'intervalle I, φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - \varphi_0$ est solution de (H).
Il suffit donc de résoudre (H) et de trouver une solution particulière de (E).

Méthode de la variation de la constante
On cherche les solutions de (E) sous la forme : $y = c(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$, où c est une fonction dérivable sur I.
y est solution de (E) si et seulement si :
$c'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} - c(t)a(t)\mathrm{e}^{-A(t)} + a(t)c(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = f(t)$, c'est à dire $c'(t) = f(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.
On est ramené à un calcul de primitives.

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants réels une équation de la forme :

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = f(t),$$

où a, b et c sont des réels $a \neq 0$, et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.
On appelle équation homogène associée à (E) l'équation :

$$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

2.1 Résolution de l'équation homogène

On admet le résultat suivant, qui est essentiel dans la pratique :

Théorème 3.
L'ensemble des solutions de (H) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.
Pour résoudre (H) il suffit de connaître deux solutions linéairement indépendantes.

On cherche des solutions particulières de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ où r est un nombre complexe. Une telle fonction est solution de (H) si et seulement si $ar^2 + br + c = 0$. Cette équation est appelée **équation caractéristique**.
On note Δ son discriminant (i.e. $\Delta = b^2 - 4ac$).

- **1er cas** : Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet dans deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Alors l'ensemble des solutions de (H) est :

$$\left\{t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t}; \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- **2ème cas** : Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une solution réelle double (qui est $r = \frac{-b}{2a}$). Alors l'ensemble des solutions de (H) est :

$$\left\{t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{rt} + \lambda_2 t \mathrm{e}^{rt}; \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- **3ème cas** : Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique n'admet pas de solution réelle. Elle admet deux racines complexes conjuguées : $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, α et β étant deux réels. Alors l'ensemble des solutions de (H) est :

$$\left\{t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t + \lambda_2 \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t; \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

  Dans ce cas en physique on préfère écrire les solutions sous la forme $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t - \varphi)$ avec $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

2.2 Résolution de l'équation avec second membre

Théorème 4.
Si φ_0 est une solution de (E) sur l'intervalle I, φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - \varphi_0$ est solution de (H).
Il suffit donc de résoudre (H) et de trouver une solution particulière de (E).

Proposition 1.
- *Si $f(t) = \mathrm{e}^{mt} P(t)$ où m est un réel P est un polynôme réel, alors il existe une solution de la forme $t \mapsto Q(t)\mathrm{e}^{mt}$*
- *Si $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $f(t) = \cos(\omega t)$ où ω est un réel, alors il existe une solution de la forme*
  - *$t \mapsto \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t)$ si $t \mapsto \cos(\omega t)$ n'est pas solution de (H)*
  - *$t \mapsto \lambda t \sin(\omega t) + \mu t \cos(\omega t)$ sinon.*