

Intégrale

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1.1 Primitives d'une fonction

Définition 1. On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée sur I est f .

Propriétés 1. Soit f une fonction admettant une primitive F sur l'intervalle I . Alors les primitives de f sur I sont les fonctions $F + c$ où c est une constante réelle quelconque.

Théorème 1. (admis)

Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I .

1.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

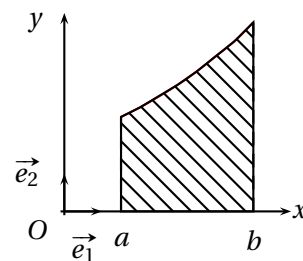
1.2.1 Définition de l'intégrale

Définition 2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I .

Le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie. Il est appelé intégrale de f entre a et b .

On note $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Nous admettrons que si f est une fonction continue et positive sur le segment $[a, b]$, l'intégrale de f entre a et b représente l'aire de la région du plan délimitée par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



1.2.2 Propriétés

Propriétés 2. Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I , λ et μ deux réels quelconques, a, b et c trois réels de I .

1. **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

2. **Linéarité :** $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$

3. **Positivité :** Pour $a < b$: Si $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Si f est **continue**, positive ou nulle sur $[a, b]$ mais non identiquement nulle, alors $\int_a^b f(x) dx > 0$.

4. Pour $a < b$: Si $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

5. Pour $a < b$: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Théorème 2.

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I , alors la fonction F définie sur I par :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ est l'unique primitive de } f \text{ s'annulant en } a.$$

Théorème 3. Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur le segment $[0, 1]$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

1.2.3 Procédés d'intégration

Théorème 4. Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur le segment $[a, b]$:

$$\int_a^b u'(x).v(x) dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x) dx$$

Théorème 5. Changement de variable

Soit φ une fonction de classe C^1 et strictement monotone sur le segment $[a, b]$ et f une fonction continue sur $[\varphi(a), \varphi(b)]$:

$$\int_a^b f \circ \varphi(x) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$$

1.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition 3. Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$. On dit que f est continue par morceau si elle n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité en chacun desquels elle présente une limite finie à droite et une limite finie à gauche.

Autrement dit il existe une suite finie strictement croissante $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue et prolongeable par continuité sur l'intervalle fermé $[x_i, x_{i+1}]$.

Une telle subdivision est appelée **adaptée** à f . Elle n'est pas unique : il est possible d'ajouter arbitrairement des points à la subdivision.

Étant données deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, il existe une subdivision adaptée simultanément aux deux fonctions : il suffit de réunir deux subdivisions adaptées respectivement à chacune d'elles.

On montre alors facilement que toute combinaison linéaire de fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et tout produit de fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

1.3.1 Définition de l'intégrale

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision adaptée à f .

Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on note f_i la fonction obtenue en prolongeant f par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$. Alors le réel :

$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(x) dx$ ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie. On l'appelle intégrale de f sur $[a, b]$ et on le

note $\int_a^b f(x) dx$.

Si $a = b$ on pose $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Si $a > b$ on pose $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

1.3.2 Propriétés

Ce sont les mêmes que celles de l'intégrale d'une fonction continue.

Mais une fonction positive peut avoir une intégrale nulle, sans que la fonction soit nulle sur l'intervalle.

2 Intégrale généralisée

2.1 Intégrale d'une fonction continue sur $[a, b[$

Définition 4.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b[$. On considère la fonction :

$$\begin{aligned}\Phi : [a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) dt\end{aligned}$$

On dit que f admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$ (l'intégrale de f converge sur $[a, b[$) si la fonction Φ a une limite finie à gauche en b . On note :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt.$$

Si l'intégrale ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Remarques Soit f une fonction continue sur $[a, b[$.

1. Si $a < c < b$ alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_c^b f(t) dt$ converge.

2. Si on connaît une primitive F de f sur $[a, b[$, alors $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$.

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si F a une limite finie à gauche en b .

3. Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge et si $b \in \mathbb{R}$, alors la fonction Φ est continue à gauche en b .

Exemple

$f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$. f est continue sur $[1, +\infty[$.

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x \text{ et pour } \alpha \neq 1, \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1} \left[1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right].$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2.2 Intégrale d'une fonction continue sur $]a, b]$

Définition 5.

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $]a, b]$. On considère la fonction :

$$\begin{aligned}\Phi :]a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_x^b f(t) dt\end{aligned}$$

On dit que f admet une intégrale généralisée sur $]a, b]$ (l'intégrale de f converge sur $]a, b]$) si la fonction Φ a une limite finie à droite en a . On note :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt.$$

Si l'intégrale ne converge pas on dit qu'elle diverge.

Exemple

$f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ sur $]0, 1]$. f est continue sur $]0, 1]$.

$$\int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\ln x \text{ et pour } \alpha \neq 1, \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1 - \alpha} [1 - x^{1-\alpha}].$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

2.3 Intégrale d'une fonction continue sur $]a, b[$

Définition 6.

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et f continue sur $]a, b[$. Soit c un réel quelconque de $]a, b[$.

On dit que f admet une intégrale généralisée sur $]a, b[$ si f admet une intégrale généralisée sur $]a, c[$ et sur $]c, b[$.

On note : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

Remarque Soit f une fonction continue sur $]a, b[$.

Si on connaît une primitive F de f sur $]a, b[$, alors $\int_x^y f(t) dt = F(y) - F(x)$. L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si F a une limite finie à droite en a et à gauche en b .

Généralisation :

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points : il existe une suite finie strictement croissante $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue. On dit que l'intégrale de f converge sur $]a, b[$ si l'intégrale de f converge sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq n-1$.

On définit : $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(x) dx$.

Proposition 1.

Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Si les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt$ converge et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

La relation de Chasles, la propriété de positivité de l'intégrales sont aussi vérifiées.

2.4 Cas des fonctions positives

Théorème 6.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et f continue et positive sur $[a, b[$.

f admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$ si et seulement si la fonction $\Phi : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Théorème 7. (Convergence par comparaison pour deux fonctions positives)

Soient deux fonctions f et g continues sur $[a, b[$ telles que $\forall x \in [a, b[, 0 \leq f \leq g$.

Si l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

2.5 Convergence absolue

Définition 7.

On dit que l'intégrale de f converge absolument sur $]a, b[$ si l'intégrale de $|f|$ converge sur $]a, b[$.

Théorème 8.

Si l'intégrale de f converge absolument sur $]a, b[$, alors l'intégrale de f converge sur $]a, b[$.

2.6 Changement de variable

Théorème 9.

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $]a, b[$ et ayant des limites $\alpha = \lim_{a+} \varphi$ et $\beta = \lim_{b-} \varphi$ et

soit f une fonction continue sur $]\alpha, \beta[$. Alors les intégrales $\int_a^b f \circ \varphi(x) \varphi'(x) dx$ et $\int_\alpha^\beta f(t) dt$ convergent et divergent simultanément, et ont la même valeur lorsqu'elles convergent.