

Suites et séries réelles

1 Récurrence

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$:

- On vérifie que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.
- On suppose que pour un entier n quelconque tel que $n \geq n_0$, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Sous cette hypothèse, on démontre que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- Par récurrence on en déduit que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$.

2 Suites

2.1 Généralités

Définition 1. Une suite numérique est une fonction qui, à tout entier naturel n associe un réel.

$$\begin{array}{ccc} u : & \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto u_n \end{array}$$

Définition 2. : Suite arithmétique

On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé la raison de la suite arithmétique (u_n) .

Proposition 1.

(u_n) est une suite arithmétique de raison r si et seulement si, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 + nr$.

Proposition 2. Pour tout entier naturel n non nul : $S_n = 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$S'_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Définition 3. : Suite géométrique

On dit qu'une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = qu_n$.
Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique (u_n) .

Proposition 3.

(u_n) est une suite géométrique de raison q si et seulement si, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 q^n$.

Proposition 4. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $q \neq 1$: $S_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Définition 4. : Suite arithmético-géométrique

On dit qu'une suite (u_n) est arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Proposition 5. Soit ℓ tel que $\ell = a\ell + b$. La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell)$.

Proposition 6. : Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit une suite (u_n) telle qu'il existe deux réels a et $b \neq 0$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Soit l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$.

Si l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , alors

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n.$$

Si l'équation caractéristique a deux racines complexes non réelles $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$, alors

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, u_n = \lambda_1 r^n \cos(n\theta) + \lambda_2 r^n \sin(n\theta).$$

Si l'équation caractéristique a une racine double r , alors

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, u_n = \lambda_1 r^n + \lambda_2 nr^n.$$

2.2 Limite

Définition 5.

On dit que la suite (u_n) admet comme limite

- ℓ lorsque : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[)$
- $+\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (u_n \in]A, +\infty[)$
- $-\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (u_n \in]-\infty, A[)$

Propriétés 1. Si la suite (u_n) admet une limite, alors cette limite est unique.

Propriétés 2. Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ , alors la suite (u_n) converge vers ℓ .

2.2.1 Limites et inégalités

Théorème 1.

- Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) admettent la même limite ℓ , alors il en est de même pour (v_n) . (**Théorème des gendarmes, d'encadrement**)
- Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et si la suite u tend vers $+\infty$, alors il en est de même pour la suite v .
- Si à partir d'un certain rang $v_n \leq w_n$ et si la suite w tend vers $-\infty$, alors il en est de même pour la suite v .

Théorème 2.

Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et si les suites u et v admettent comme limites respectives ℓ et ℓ' , alors $\ell \leq \ell'$.

Théorème 3.

Soit u une suite de limite $\ell > 0$. Alors il existe un nombre réel strictement positif m et un entier N tels que, pour tout $n \geq N$, on ait $0 < m \leq u_n$. La suite $\frac{1}{u}$ est définie à partir du rang N .

2.2.2 Opérations sur les limites

Théorème 4.

Soient les suites u et v admettant respectivement comme limites ℓ et ℓ' et soit un nombre réel λ . Alors :
 $u + v$ admet pour limite $\ell + \ell'$, λu admet pour limite $\lambda \ell$, uv admet pour limite $\ell \ell'$.

Si $\ell' \neq 0$, $\frac{u}{v}$ admet pour limite $\frac{\ell}{\ell'}$.

Théorème 5.

1. Si u diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et v a une limite finie, alors $u + v$ diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
2. Si u et v divergent vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), alors $u + v$ diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
3. Si u diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et si il existe un nombre réel $m > 0$ tel que $v \geq m$ (ceci est en particulier vérifié si v a une limite strictement positive), alors uv diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
4. Si u et v divergent vers des limites infinies, alors uv diverge vers la limite infinie.

Théorème 6.

Si la suite (u_n) tend vers ℓ et si la fonction f est continue en ℓ , alors la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$.

2.3 Convergence d'une suite monotone

Définition 6.

On dit que la suite (u_n) est croissante si, pour tout entier n , $u_{n+1} \geq u_n$.

On dit que la suite (u_n) est décroissante si, pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$.

Une suite qui est soit croissante, soit décroissante, est dite monotone.

Définition 7.

On dit que la suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$.

On dit que la suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq m$.

Une suite à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Propriétés 3.

1. *Si une suite croissante est majorée, alors elle est convergente.*
2. *Si une suite décroissante est minorée, alors elle est convergente.*
3. *Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.*
4. *Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.*

Définition 8. Suites adjacentes

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une d'entre elles est croissante, l'autre décroissante, et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Propriétés 4. *Deux suites adjacentes sont convergentes vers une même limite ℓ .*

2.4 Suites équivalentes

Définition 9. On dit que la suite u est équivalente à v , lorsque la suite $\frac{u}{v}$ tend vers 1. On note : $u_n \sim v_n$.

Propriétés 5.

La relation d'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante.

3 Séries

3.1 Définitions

Définition 10.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite (S_n) a une limite finie S quand n tend vers $+\infty$.

Le réel S est appelé somme de la série. On note : $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Si la série ne converge pas on dit qu'elle diverge.

Proposition 7.

Pour que la série de terme général u_n converge, il faut que son terme général tende vers 0.

Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série de terme général u_n diverge.

Proposition 8.

Si les séries de termes généraux u_n et v_n convergent, alors la série de terme général $au_n + bv_n$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (au_k + bv_k) = a \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + b \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

3.2 Exemple 1

Théorème 7. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

3.3 Exemple 2 : La série géométrique $\sum q^n$

Si $q \neq 1$, posons $S_n(q) = \sum_{k=0}^n q^k$. On a $S_n(q) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ et $S'_n(q) = \sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1 - q)^2}$.

$$S''_n(q) = \sum_{k=2}^n k(k-1)q^{k-2} = \frac{2 - n(n+1)q^{n-1} + 2(n+1)(n-1)q^n - n(n-1)q^{n+1}}{(1 - q)^3}.$$

Théorème 8. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

$$\forall q \in]-1, 1[, \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1 - q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1 - q)^3}$$

3.4 Exemple 3 : La série exponentielle

La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

3.5 Étude des séries à termes positifs

Théorème 9. (Convergence par comparaison pour deux séries à termes positifs)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :

Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.

Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.

3.6 Convergence absolue

Définition 11.

On dit que la série de terme général u_n converge absolument si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Théorème 10.

Si la série de terme général u_n converge absolument, alors la série de terme général u_n converge.