Fonctions

1 Limites

1.1 Définitions

Définition 1. Limite en a
Soit un réel a et f une fonction numérique dont l'ensemble de définition D contient un intervalle $]a-\beta, a[$ ou $]a, a+\beta[$.
On dit que f admet comme limite en a
- ℓ lorsque : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^\star,\ (x \in]a-\eta, a+\eta[\cap D) \Rightarrow (f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[)$
- $+\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^\star,\ (x \in]a-\eta, a+\eta[\cap D) \Rightarrow (f(x) \in]A, +\infty[)$
- $-\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^\star,\ (x \in]a-\eta, a+\eta[\cap D) \Rightarrow (f(x) \in]-\infty, A[)$

Propriétés 1.
- *Si la fonction f admet une limite en a, alors cette limite est unique.*
- *Si de plus f est définie en a, alors cette limite est égale à $f(a)$.*

Définition 2. Limite à droite et à gauche
Soit un réel a et f une fonction numérique dont l'ensemble de définition D contient un intervalle $]a-\beta, a[$.
On dit que f admet comme limite ℓ à gauche en a lorsque :
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^\star,\ (x \in]a-\eta, a[\cap D) \Rightarrow (f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[)$

On définit la limite à droite de manière analogue.

Propriétés 2.
Soit un réel a et f une fonction numérique dont l'ensemble de définition D contient un intervalle $]a-\beta, a+\beta[$. Alors : f a une limite en a si et seulement si f a une limite à droite et une limite à gauche en a, toutes les deux égales à $f(a)$.

Définition 3. Limite en $+\infty$
Soit f une fonction réelle dont l'ensemble de définition D contient un intervalle $]m, +\infty[$.
On dit que f admet comme limite
- ℓ en $+\infty$ lorsque : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star,\ \exists B \in \mathbb{R},\ (x \in]B, +\infty[\cap D) \Rightarrow (f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[)$
- $+\infty$ en $+\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ (x \in]B, +\infty[\cap D) \Rightarrow (f(x) \in]A, +\infty[)$
- $-\infty$ en $+\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ (x \in]B, +\infty[\cap D) \Rightarrow (f(x) \in]-\infty, A[)$

On a des définitions analogues en $-\infty$.

Théorème 1.
Si la suite (u_n) tend vers a et si la limite de la fonction f en a est ℓ, alors la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ.
Si la suite (u_n) tend vers a et si la fonction f est continue en a, alors la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.

1.2 Limites et inégalités

Théorème 2. *Théorème d'encadrement*
a désigne un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $f \leqslant g \leqslant h$ et si les fonctions f et h admettent la même limite ℓ en a, alors il en est de même pour g.
Si $f \leqslant g$ et si la fonction f admet pour limite $+\infty$ en a, alors il en est de même pour g.
Si $g \leqslant h$ et si la fonction h admet pour limite $-\infty$ en a, alors il en est de même pour g.

Théorème 3.
a désigne un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $f \leqslant g$ et si les fonctions f et g admettent respectivement comme limites ℓ et $\ell^{'}$ en a, alors $\ell \leqslant \ell^{'}$.

Théorème 4.
Soit f une fonction de limite $\ell > 0$ en a. Alors il existe deux nombres réels strictement positifs m et β tels que, pour tout $x \in]a-\beta, a+\beta[\cap D$, on ait $0 < m \leqslant f(x)$.
La fonction $\dfrac{1}{f}$ est définie sur $]a-\beta, a+\beta[\cap D$.

1.3 Opérations sur les limites

Théorème 5.
a désigne un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Soient les fonctions f et g admettent respectivement comme limites ℓ et ℓ' en a et soit un nombre réel λ. Alors :
$f+g$ admet pour limite limite $\ell+\ell^{'}$ en a,
λf admet pour limite limite $\lambda\ell$ en a,
fg admet pour limite limite $\ell\ell'$ en a.
Si $\ell' \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ admet pour limite limite $\dfrac{l}{\ell'}$ en a.

Théorème 6.
a désigne un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$.
On suppose que f diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et que g a une limite finie en a. Alors $f+g$ diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
On suppose que f et g divergent vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$). Alors $f+g$ diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
On suppose que f diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et qu'il existe un nombre réel $m > 0$ tel que $g \geqslant m$ (ceci est en particulier vérifié si g a une limite strictement positive). Alors fg diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
On suppose que f et g divergent vers des limites infinies. Alors fg diverge vers la limite infinie donnée par la règle des signes du produit.

1.4 Limite d'une fonction composée

Théorème 7. *a, b et ℓ désignent des nombres réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.*
On suppose que f admet pour limite b en a et que g admet pour limite ℓ en b. Alors $g \circ f$ admet pour limite ℓ en a.

1.5 Limites et fonctions monotones

Théorème 8. *Une fonction monotone sur un intervalle ouvert (borné ou non) admet une limite finie ou infinie aux bornes de cet intervalle.*

1.6 Comparaison de fonctions

Définition 4. Soit un réel a, f et g deux fonctions réelles dont les ensembles de définition contiennent un intervalle $]a-\beta, a[$ ou $]a, a+\beta[$.

On dit que f est équivalente à g en a, lorsque $\dfrac{f}{g}$ tend vers 1 en a. On note : $f \underset{a}{\sim} g$, ou aussi $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.

Propriétés 3. *L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division, l'élévation à une puissance constante.*

Théorème 9. *Soient α, β et γ trois nombres réels strictement positifs.*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{\mathrm{e}^{\alpha x}} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}|x|^\beta = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} |\ln x|^\gamma x^\beta = 0$$

2 Continuité

2.1 Continuité en un point

Définition 5.

- Soit un réel a et f une fonction réelle dont l'ensemble de définition D contient un intervalle $]a-\beta, a]$ ou $[a, a+\beta[$. On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite en a. Cette limite est nécessairement $f(a)$.
- Soit un réel a et f une fonction réelle dont l'ensemble de définition D contient un intervalle $[a, a+\beta[$ (respectivement $]a-\beta, a]$. On dit que f est continue à droite (respectivement à gauche) en a lorsque f admet une limite à droite (respectivement à gauche) en a.

Théorème 10. *Soit un réel a et f une fonction réelle dont l'ensemble de définition D contient un intervalle $]a-\beta, a[$ ou $]a, a+\beta[$. On suppose que f n'est pas définie en a mais a une limite finie en a notée ℓ. Alors la fonction définie sur $D \cup \{a\}$ par $g(a) = f(a)$ et $g(x) = f(x)$ si $x \in D$ est continue en a. On l'appelle prolongement par continuité de f.*

Propriétés 4. *Soit un réel a.*

- *Si f et g sont continues en a, alors $f+g, \lambda f, fg$ sont continues en a.*
  Si de plus $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.
- *Si la fonction f est continue en a et si la fonction g est continue en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en a*

2.2 Continuité sur un intervalle

Définition 6.

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ lorsqu'elle est continue en tout point de cet intervalle.

2.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 11.

- *Soit une fonction numérique f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I.*
  Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c compris entre a at b tel que $f(c) = k$.
- *Soit une fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Alors l'ensemble image $f(I)$ est un intervalle.*

Théorème 12.

L'image d'un segment par une fonction continue sur ce segment est un segment.
Une fonction continue sur un segment est donc bornée et atteint ses bornes.

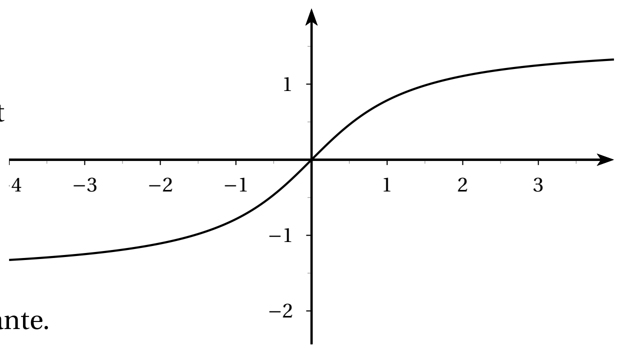
Théorème 13. ***Théorème de la bijection***

Soit la fonction f continue et strictement monotone sur l' intervalle I, à valeurs réelles.
Alors f est une bijection de I sur $J = f(I)$.
Sa fonction réciproque f^{-1} définie sur J est aussi continue et strictement monotone, de même sens que f.

2.4 Fonction Arctangente

Définition 7.

La restriction de la fonction tangente à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est continue et strictement croissante. Elle est donc bijective.



On note arctan sa fonction réciproque.

$\tan : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Arctan est une fonction impaire continue et strictement croissante.

• On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$.

• $\arctan(\tan x) \iff x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3 Dérivabilité

3.1 Dérivée d'une fonction en un point

Définition 8. f est une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un point de I.

Le taux d'accroissement de f en a est la fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ par $\tau_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
On dit que la fonction f est dérivable en a lorsque τ_a admet une limite finie en a.
Cette limite est notée $f'(a)$, c'est le nombre dérivé de f en a.

Définition 9.
Soit f une fonction dérivable au point a et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. On appelle tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.
Une équation de cette tangente est : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Propriétés 5.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. (réciproque fausse).

3.1.1 Dérivées à gauche ou à droite

Définition 10.
a désigne un point de l'intervalle I qui n'est pas extrémité de I.
On dit que f est dérivable à gauche (*resp.* à droite) en a lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite à gauche (*resp.* à droite) finie en a.
Cette limite finie est alors notée $f'_g(a)$ (*resp.* $f'_d(a)$), et on l'appelle le nombre dérivé en a de f à gauche (*resp.* à droite).

Interprétation géométrique : on dit que f admet une demi-tangente à gauche ou à droite.

Théorème 14.
La fonction f est dérivable en a si, et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche, avec $f'_g(a) = f'_d(a)$.

3.2 Théorèmes généraux

3.2.1 Opérations

Théorème 15.
Soient f et g deux fonctions dérivables en a, et λ et μ deux nombres réels.
- *La fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.*
- *La fonction $f \times g$ est dérivable en a et $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
- *Si de plus $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est derivable en a, et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$.*
  $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

3.2.2 Fonctions composées

Théorème 16.
On suppose que f va de I dans J et qu'elle est dérivable en a, que g va de J dans $\mathbb{R}$ et qu'elle est dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.

3.2.3 Fonctions réciproques

Théorème 17.
On suppose que f est continue, strictement monotone de I sur J et dérivable en a. Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si, et seulement si $f'(a) \neq 0$ et, dans ce cas, nous avons $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Théorème 18.
La fonction Arctangente *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3.3 Fonctions dérivables sur un intervalle

3.3.1 Fonction dérivée, et dérives d'ordre supérieur

Définition 11. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.
Alors la fonction qui à tout x de I associe $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f sur I. On la note f'.

Définition 12. Une fonction de classe C^0 est une fonction continue (on pose alors $f^{(0)} = f$) et, pour $n \geq 1$, une fonction de classe C^n est une fonction dérivable telle que f' est de classe C^{n-1} (on pose alors $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$).
Enfin, une fonction est de classe C^∞ lorsqu'elle est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notations variées pour la fonction dérivée $n^{\text{ième}}$: $f^{(n)}$, $D^n(f)$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Théorème 19.
Soient f et g deux fonctions de classe C^n sur un intervalle I. Alors le produit fg est de classe C^n sur I.
Si f est de classe C^n sur I et g de classe C^n sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est de classe C^n sur I.

3.3.2 Condition nécessaire d'existence d'un extremum

Théorème 20.
Soit f définie sur I, et soit a un point de$I$. On suppose que f est dérivable en a, et admet un extremum local en a.
Alors $f'(a) = 0$.

4 Le théorème des accroissements finis et ses conséquences

4.1 Le théorème de Rolle

Théorème 21.
Soit f une fonction numérique continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

4.2 Le théorème des accroissements finis

Théorème 22.
Soit f une fonction numérique continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

4.3 Caractérisation des fonctions monotones

Théorème 23.
*Soit f une fonction numérique dérivable sur un **intervalle** I. On a les équivalences suivantes :*
f est croissante si, et seulement si $f' \geqslant 0$;
f est décroissante si, et seulement si $f' \leqslant 0$;
f est constante si, et seulement si $f' = 0$.

Théorème 24.
*Soit f une fonction numérique dérivable sur un **intervalle** I.*
Si f' est positive ou nulle sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

5 Développements limités

5.1 Formule de Taylor-Young

Théorème 25.
Soit f une fonction de classe C^n sur I et $a \in I$. Alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{a}{o}((x-a)^n)$$

5.2 Développements limités

Définition 13. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I contenant 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 lorsqu'il existe $n+1$ nombres réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n)\,.$$

$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ s'appelle partie régulière du développement limité, $\mathrm{o}(x^n)$ est le reste de ce développement.

Théorème 26.
- *Les coefficients d'un développement limité sont uniques.*
- *Soit f une fonction paire (respectivement impaire) admettant un développement limité d'ordre n en 0. Alors la partie régulière de ce développement limité est paire (respectivement impaire).*

Remarque
Si f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 alors f est dérivable en 0 et $c_0 = f(0)$ et $c_1 = f'(0)$.

Théorème 27. ***Somme et produit***
On suppose que f et g admettent des développements limitées d'ordre n en 0, dont les parties régulières sont $P(x)$ et $Q(x)$, et que λ et μ sont deux nombres réels. Alors :
- *$\lambda f + \mu g$ admet un développement limité d'ordre n en 0, dont la partie régulière est $\lambda P + \mu Q$.*
- *$f \times g$ admet un développement limité d'ordre n en 0, dont la partie régulière est obtenue en tronquant le produit $P(x)Q(x)$ au degré n.*

Théorème 28. ***Composition***
Soient I et J deux intervalles contenant 0, f une fonction de I dans J admettant un développement limité d'ordre n en 0 dont le terme constant est nul, *et g une fonction de J dans $\mathbb{R}$ admettant un développement limité d'ordre n en 0. Alors $g \circ f$ admet un développement limité en 0 d'ordre n.*

Théorème 29. ***Primitivation des développements limités***

Soit f une fonction dérivable de I contenant 0 dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction dérivée f' admet en 0 le développement limité $f'(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$. Alors $f(x) = f(0) + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$

Les développements limités usuels en zéro

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n)$

$\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$

$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n)$