Géométrie

1 Espace vectoriel euclidien

1.1 Produit scalaire, norme euclidienne

Définition 1. Produit scalaire
E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ sa base canonique.
Soient $\overrightarrow{u} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, \dots, v_n)$ deux vecteurs de E.
On appelle produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel : $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$.
L'espace vectoriel E muni du produit scalaire est appelé espace euclidien.

Propriété 1.
Le produit scalaire est :
a) *Bilinéaire :* $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) \in E^3,\ < \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v} >= \lambda_1 < \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v} > + \lambda_2 < \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v} >$
$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \in E^3,\ < \overrightarrow{u}, \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} >= \lambda_1 < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1} > + \lambda_2 < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2} >$
b) *Symétrique :* $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >=< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$.
c) *Défini positif :* $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} > \geqslant 0$ *et* $\left(< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >= 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\right)$.

Définition 2. Norme euclidienne
On appelle norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ le réel $\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >}$

Propriété 2.
a) $\| \overrightarrow{u} \| = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
b) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \overrightarrow{u} \in E,\ \| \lambda \overrightarrow{u} \| = |\lambda| \times \| \overrightarrow{u} \|$
c) $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ | < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > | \leqslant \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \|$ *(inégalité de Schwarz)*
$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ \| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \| \leqslant \| \overrightarrow{u} \| + \| \overrightarrow{v} \|$ *(inégalité triangulaire)*

Remarque 1. $| < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > | = \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \| \iff$ la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée

1.2 Orthogonalité

Définition 3. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de E sont orthogonaux si $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= 0$.

Théorème 1. *(de Pythagore)*
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs orthogonaux de E. Alors :
• $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2$
• $\| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2$

Propriété 3.
a) *Une famille formée de vecteurs orthogonaux non nuls est libre.*
b) *Une famille de n vecteurs de E orthogonaux deux à deux et de norme 1 est une base de E appelée* ***base orthonormale****.*
c) *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de E, $U' = \begin{pmatrix} u_1' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix}$ leurs coordonnées dans une base orthonormale quelconque.*
Alors : $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= u_1' v_1' + \dots + u_n' v_n' = {}^t U' V'$.
d) *Soit $(\overrightarrow{e_1'}, \dots, \overrightarrow{e_n'})$ une base orthonormale de E. Alors* $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{n} < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_j'} > \overrightarrow{e_j'}$
e) *Soit P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$. $\mathscr{B}'$ est orthonormale si et seulement si ${}^t PP = I_n$.*

Théorème 2. *(admis)*
Toute matrice carrée réelle symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.
Il existe une matrice P vérifiant ${}^t PP = I_n$ telle que ${}^t PAP$ soit diagonale.

Théorème 3. *(admis)*
Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E possède des bases orthonormales.

1.3 Projection orthogonale

Définition 4.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E. On appelle distance de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ le réel $d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{v}-\vec{u}\|$
Soient $\vec{u}\in E$ et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle distance de $\vec{u}$ à F : $d(\vec{u},F) = \inf_{\vec{v}\in F}\|\vec{u}-\vec{v}\|$

Théorème 4. ***et définition***
Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\vec{u}$ un vecteur de E. Il existe un vecteur unique $p(\vec{u})$ tel que :

- $p(\vec{u})\in F$
- $\vec{u}-p(\vec{u})$ *est orthogonal à tout vecteur de F.*

Le vecteur $p(\vec{u})$ est également l'unique vecteur de F tel que

$$\|\vec{u}-p(\vec{u})\| = d(\vec{u},F) = \inf_{\vec{v}\in F}\|\vec{u}-\vec{v})\|$$

$p(\vec{u})$ est appelé projection orthogonale de $\vec{u}$ sur F.

Si $(\vec{e'_1},\dots,\vec{e'_m})$ est une base de F, alors $p(\vec{u})$ est caractérisé par : $\begin{cases} \exists!(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in\mathbb{R}^m,\ p(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\vec{e'_i} \\ \forall i\in[\![1,m]\!],\ <p(\vec{u}),\vec{e'_i}> = <\vec{u},\vec{e'_i}> \end{cases}$

Si $(\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_m})$ est une base orthonormale de F, alors $\boxed{p(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{m} <\vec{u},\vec{\varepsilon_i}>\vec{\varepsilon_i}}$

Propriété 4. *L'application p qui à tout vecteur $\vec{u}$ de E associe $p(\vec{u})$ est un endomorphisme de E.*
• *Son image est F.*
• *Son noyau est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F noté $F^{\perp}$.*
• $p\circ p = p$.
• *$Id-p$ est la projection orthogonale sur $F^{\perp}$.*

Remarques : • Soient $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ des bases orthonormales de F et $F^{\perp}$. Alors $(\mathscr{B},\mathscr{B}')$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
• Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, H l'ensemble des vecteurs orthogonaux à a. Alors $\forall u\in\mathbb{R}^n,\ d(u,H) = \dfrac{|<u,a>|}{\|a\|}$.

Un exemple important : la droite de régression
Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$ et $\vec{y} = (y_1,\dots,y_n)$. Posons $\vec{w} = (1,\dots,1)$ et $F = \text{vect}(\vec{x},\vec{w})$.
On cherche $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ qui minimise $f(a,b) = \sum_{k=1}^{n}(y_k-(ax_k+b))^2 = \|\vec{y}-(a\vec{x}+b\vec{w})\|^2$.
Ce problème a une solution unique : le couple (a_0,b_0) tel que $a_0\vec{x}+b_0\vec{w}$ soit la projection orthogonale de $\vec{y}$ sur F.
(a_0,b_0) est déterminé par : $\begin{cases} <a_0\vec{x}+b_0\vec{w},\vec{x}> = <\vec{y},\vec{x}> \\ <a_0\vec{x}+b_0\vec{w},\vec{w}> = <\vec{y},\vec{w}> \end{cases}$ On trouve $\begin{cases} a_0 = \dfrac{s_{x,y}}{s_x^2} \\ b_0 = \overline{y}-a_0\overline{x} \end{cases}$.

2 Droites et plans

2.1 Espace affine

Pour $n=2$, $\mathscr{E}$ désigne le plan affine, pour $n=3$, $\mathscr{E}$ désigne l'espace affine.
$\mathscr{E}$ est caractérisé par l'existence d'une application de $\mathscr{E}\times\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}^n$, notée $(A,B)\mapsto\overrightarrow{AB}$ telle que :

- Pour tout point O de $\mathscr{E}$ et pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique point M de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
- Pour tous les points A,B,C de $\mathscr{E}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. (relation de Chasles).

Coordonnées
Un repère de $\mathscr{E}$ est un couple $(O,\mathscr{B})$ où l'origine O est un point fixé de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
Les coordonnées du point M dans le repère $(O,\mathscr{B})$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathscr{B}$.
On peut identifier le point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Droite :
Soit A un point et D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $\mathscr{D} = \{M\in\mathscr{E},\ \overrightarrow{AM}\in D\}$ est appelé droite.
Tout vecteur non nul de D engendre D. Il est appelé vecteur directeur de la droite.
A et B étant deux points distincts, on appelle droite (AB) la droite contenant A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$.
Plan :
Soit A un point et P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $\mathscr{P} = \{M\in\mathscr{E},\ \overrightarrow{AM}\in P\}$ est appelé plan.
Toute base de P est appelée base du plan. Elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires de P.

2.2 Droites et cercles dans le plan affine

2.2.1 Équations paramétriques d'une droite du plan

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A de coordonnées (x_0, y_0) dans le repère $(O, \mathscr{B})$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (α, β) dans la base $\mathscr{B}$. M étant un point de coordonnées (x, y) :

$$M \in \mathscr{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{cases}$$

Pour $\alpha \neq 0$ on appelle pente ou coefficient directeur de la droite le rapport $\dfrac{\beta}{\alpha}$. La droite est dirigée par le vecteur de coordonnées $\left(1, \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$.

2.2.2 Vecteur normal à une droite du plan euclidien

On munit le plan du produit scalaire usuel.
Si $\mathscr{D}$ est une droite du plan $\mathscr{E}$ et D le sous-espace vectoriel de E associé à cette droite, alors l'orthogonal de D est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de E. Tout vecteur non nul de $D^\perp$ engendre donc $D^\perp$.
On appelle **vecteur normal** à une droite du plan un vecteur qui engendre son orthogonal : c'est un vecteur non nul orthogonal à tout vecteur directeur de cette droite.

2.2.3 Équation cartésienne d'une droite du plan euclidien

Le plan est muni d'un repère orthonormal.
Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A de coordonnées (x_0, y_0) dans le repère $(O, \mathscr{B})$ et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées (a, b) dans la base $\mathscr{B}$. M étant un point de coordonnées (x, y) :

$$M \in \mathscr{D} \iff < \vec{n}, \overrightarrow{AM} >= 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Propriété 5.

a) Si $\vec{n}(a, b)$ est un vecteur normal d'une droite $\mathscr{D}$, alors une équation de $\mathscr{D}$ s'écrit sous la forme $ax + by + c = 0$.

b) Réciproquement, si a et b ne sont pas tous les deux nuls, alors l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$ est une droite.
Le vecteur de coordonnées (a, b) est un vecteur normal. Le vecteur de coordonnées $(-b, a)$ dirige la droite.

2.2.4 Cercle dans le plan

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω de coordonnées (x_0, y_0) dans un repère orthonormé et de rayon r.

$$M \in \mathscr{C} \iff \Omega M = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

2.3 Droites et plans dans l'espace

2.3.1 Équations paramétriques d'une droite

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans le repère $(O, \mathscr{B})$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (α, β, γ) dans la base $\mathscr{B}$. M étant un point de coordonnées (x, y, z) :

$$M \in \mathscr{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

2.3.2 Équations paramétriques d'un plan

Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans le repère $(O, \mathscr{B})$ et de base $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ dans la base $\mathscr{B}$. M étant un point de coordonnées (x, y, z) :

$$M \in \mathscr{P} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$$

2.3.3 Vecteur normal d'un plan de l'espace

On munit l'espace du produit scalaire usuel.
Si $\mathscr{P}$ est un plan de l'espace $\mathscr{E}$ et P le sous-espace vectoriel de E associé à cet plan, alors l'orthogonal de P est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de E. Tout vecteur non nul de $P^{\perp}$ engendre donc $P^{\perp}$.
On appelle **vecteur normal** à un plan de l'espace un vecteur qui engendre son orthogonal : c'est un vecteur non nul orthogonal à tout vecteur du sous-espace vectoriel associé à ce plan.

2.3.4 Équation cartésienne d'un plan de l'espace euclidien

L'espace est muni d'un repère orthonormal.
Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans le repère $(O, \mathscr{B})$ et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées (a, b, c) dans la base $\mathscr{B}$. M étant un point de coordonnées (x, y, z) :
$M \in \mathscr{P} \quad \Longleftrightarrow \quad <\vec{n}, \overrightarrow{AM}>= 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

Propriété 6. *a) Si $\vec{n}(u, v, w)$ est un vecteur normal d'un plan $\mathscr{P}$, alors une équation de $\mathscr{P}$ s'écrit sous la forme $ax+by+cz+d=0$.*
b) Réciproquement, si a b et c ne sont pas tous les trois nuls, alors l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

3 Barycentre

3.1 Définition

Soient un entier p, $A_1, \dots, A_p$ des points de $\mathscr{E}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des réels.
Pour tout $M \in \mathscr{E}$ on pose $f(M) = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{MA_p}$.
Si P est un autre point de $\mathscr{E}$, $f(M) - f(P) = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_p)\overrightarrow{MP}$.
Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = 0$, alors f est constante et si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \neq 0$, alors f est bijective.

Définition 5. :
Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \neq 0$, on appelle barycentre des points $A_1, \dots, A_p$ affectés des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ l'unique point G de $\mathscr{E}$ tel que $f(G) = \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{GA_p} = \vec{0}$.
On dit aussi que G est barycentre des points pondérés (A_i, α_i).

Ce qui équivaut à $f(M) = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{MA_p} = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_p)\overrightarrow{MG}$ pour tout point M de $\mathscr{E}$.

Propriétés 1. *Transitivité du barycentre*
Soit $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_p, \alpha_p)$ des points pondérés avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \neq 0$ et soit G son barycentre. Soit $q \leqslant p$ tel que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_q \neq 0$ et soit G' le barycentre de $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_q, \alpha_q)$. Alors G est barycentre de $(G', \alpha_1 + \cdots + \alpha_q), (A_{q+1}, \alpha_{q+1}), \dots, (A_p, \alpha_p)$.

Application
• Le milieu d'un segment AB est le barycentre de $(A, 1), (B, 1)$.
• Soient A, B, C trois points du plan et A', B', C' les milieux des cotés BC, CA, AB. Soit G le barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$. G est barycentre de $(A, 1), (A', 2)$. Il satisfait $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$. Il est situé sur la médiane AA', aux deux tiers de la longueur à partir du sommet. Le même résultat est exact pour les trois médianes. Donc les trois médianes sont concourantes en G.

3.2 Coordonnées barycentriques

Soient A, B, C trois points non alignés du plan. Tout point M du plan est barycentre de A, B, C affectés des coefficients α, β, γ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$, et ceci de façon unique.
(α, β, γ) sont appelés coordonnées barycentriques de M bans le repère ABC.
Soient A, B, C, D trois points non coplanaires de l'espace. Tout point M de l'espace est barycentre de A, B, C, D affectés des coefficients $\alpha, \beta, \gamma\delta$ tels que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$, et ceci de façon unique.
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sont appelés coordonnées barycentriques de M bans le repère $ABCD$.