

Algèbre linéaire

1 Espace vectoriel

1.1 Définition

Définition 1. Espace vectoriel

$\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou des nombres complexes. Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe :

$$\begin{array}{ll} E \times E & \longrightarrow E \\ (u, v) & \longmapsto u + v \end{array} \quad \begin{array}{ll} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow E \\ (\lambda, u) & \longmapsto \lambda.u \end{array}$$

On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ lorsque :

- La loi $+$ est commutative : $\forall (u, v) \in E^2, u + v = v + u$
- La loi $+$ est associative : $\forall (u, v, w) \in E^3, (u + v) + w = u + (v + w)$
- $+$ admet un élément neutre noté $\vec{0}$: $\forall u \in E, \vec{0} + u = u + \vec{0} = u$
- Tout élément de E admet un symétrique pour $+$: $\forall u \in E, \exists v \in E, u + v = v + u = \vec{0}$

$$\text{et } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in E^2 \left\{ \begin{array}{l} \lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v \\ (\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u \\ \lambda.(\mu.u) = (\lambda\mu).u \\ 1.u = u \end{array} \right.$$

Les éléments de E sont appelés vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ des scalaires.

Exemples : $\mathbb{K}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), \mathbb{K}[X]$, l'ensemble des suites à éléments dans $\mathbb{K}$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 2. Combinaison linéaire

Soit $A = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E . On dit que le vecteur u de E est une combinaison linéaire des vecteurs de A si $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, u = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$.

Définition 3. Sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F une partie de E .

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est stable par combinaison linéaire et contient le vecteur nul.

Théorème 1. L'intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Théorème 2.

Soit $A = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E . Alors l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A est un sous-espace vectoriel de E , noté $\text{vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

1.3 Indépendance linéaire

Définition 4.

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

- On dit que cette famille est libre lorsque :
 $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0) \implies (\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0)$.
Une famille qui n'est pas libre est dite liée.
- Cette famille est génératrice de E lorsque $E = \text{vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.
- Cette famille est une base de E lorsqu'elle est libre et génératrice.

$$\forall u \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

Les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont appelés composantes du vecteur u dans la base $(u_1, \dots, u_n)$.

Théorème 3. Si la famille $L = (u_1, \dots, u_p)$ est libre et la famille $(u_1, \dots, u_p, u)$ est liée, alors u est combinaison linéaire des vecteurs de L .

Exemple Toute famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre.

1.4 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 5.

On dit que l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est de dimension finie si il est engendré par une famille finie.

Théorème 4. Définition de la dimension

De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E de dimension finie on peut extraire une base. Toutes les bases de E ont même cardinal appelé dimension de E .

Exemples :

1. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit e_j le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf la j -ème qui est égale à 1. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique.
2. Dans $\mathbb{K}_n[X]$ la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base, appelée base canonique.

Théorème 5.

Dans un espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbb{K}$:

- *Toute famille libre a au plus n éléments.*
- *Toute famille libre ayant n éléments est une base.*
- *Toute famille génératrice a au moins n éléments.*
- *Toute famille génératrice ayant n éléments est une base.*

Théorème 6.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie.

Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

Si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Définition 6. Rang

Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel de E . On appelle rang de cette famille la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

2 Applications linéaires

2.1 Applications linéaires

Définition 7. Application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit que l'application f de E dans F est linéaire lorsque :

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Si f est linéaire de E dans lui-même on dit que f est un endomorphisme de E .

Si f est linéaire et bijective de E sur F on dit que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Si f est linéaire et bijective de E dans lui-même on dit que f est un automorphisme de E .

Définition 8. Noyau et Image

Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel F .

- On appelle noyau de f l'ensemble des antécédents par f du vecteur nul de F .

$$\text{Ker } f = \{x \in E, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(0_F).$$

- On appelle image de f l'image de E par f .

$$\text{Im } f = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\} = f(E).$$

Propriétés 1.

- $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E .
- $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de F .
- f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.
- f est surjective si et seulement si son image est F .

2.2 Opérations sur les applications linéaires

Définition 9.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, f et g deux applications linéaires de E dans F , λ un élément de $\mathbb{K}$. On définit les applications :

$$\begin{aligned} f + g : E &\longrightarrow F & \text{et} & & \lambda.f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) + g(x) & & & x &\longmapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

Théorème 7. $f + g$ et $\lambda.f$ sont linéaires. De plus $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Théorème 8.

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, f, f' dans $\mathcal{L}(E, F)$ et g, g' dans $\mathcal{L}(F, G)$. Alors :

- $g \circ f$ est linéaire
- $g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$
- $(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$

Théorème 9.

Soit f un isomorphisme de E sur F . Alors f^{-1} est linéaire. C'est un isomorphisme de F sur E .

2.3 Cas de la dimension finie

Théorème 10. : Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de F .

Alors l'application de E dans F définie pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ par $f(x_1 e_1 + \dots + x_p e_p) = x_1 v_1 + \dots + x_p v_p$ est linéaire.

C'est l'unique application linéaire de E dans F telle que : $\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}, f(e_j) = v_j$.

Définition 10.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans F .

On appelle rang de f la dimension de l'image de f .

Propriétés 2.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans F .

Alors l'image de f est engendrée par $(f(e_1), \dots, f(e_p))$, où $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E .

Donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_p))$

Théorème 11.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$, f une application linéaire de E dans F .

f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F .

Conséquence : Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Théorème 12. (Du rang)

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$ dans un espace vectoriel F . Alors :

$$\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$$

Théorème 13.

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension sur $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans F .

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- f est injective
- f est surjective
- f est bijective

Remarque : Pour qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie soit inversible, il suffit qu'il soit inversible à gauche ou à droite.

3 Matrices

3.1 Définitions

Définition 11.

a) On appelle matrice de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application
$$\begin{aligned} \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (i, j) &\longmapsto a_{ij} \end{aligned}$$

$$\text{On note : } A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices de type (n, p) est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

b) Si $n = p$ alors A est dite **carrée**.

Une matrice carrée A est dite **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$.

A est **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$.

A est **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

A est **scalaire** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $a_{ii} = a_{jj}$.

La matrice **identité** est la matrice scalaire I_n dont tous les termes de la diagonale principale sont égaux à 1.

La matrice **nulle** est la matrice dont tous les termes sont nuls.

3.2 Opérations sur les matrices

Définition 12. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de type (n, p) , et un scalaire λ .

On appelle somme de A et B la matrice $(a_{ij} + b_{ij})$.

On appelle λA la matrice (λa_{ij}) .

Proposition 1. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 13. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type (n, p) et $B = (b_{ij})$ une matrice de type (p, q) .

La matrice produit AB est la matrice $C = (c_{ij})$ de type (n, q) telle que $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$.

Proposition 2. Lorsque les produits sont définis on a :

$$A(BC) = (AB)C \quad A(B+C) = AB + AC \quad (A+B)C = AC + BC \quad I_n A = A I_p = A.$$

Proposition 3. Lorsque les matrices carrées A et B commutent : $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

3.3 Matrice inversible

Définition 14. La matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ou régulière si il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. B est appelée matrice inverse de A et est notée A^{-1} .

Proposition 4. Si les matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, alors le produit AB est inversible et son inverse est $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Remarque Pour calculer l'inverse de A on résout le système $AX = Y$.

Proposition 5. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et alors $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3.4 Transposée d'une matrice

Définition 15. La matrice **transposée** de A est la matrice de type (p, n) de terme général $b_{ji} = a_{ij}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.

Proposition 6. ${}^t(A+B) = {}^t A + {}^t B \quad {}^t(AB) = {}^t B {}^t A \quad {}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}$

3.5 Matrice des composantes d'une famille de vecteurs

Soit E en espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de F . On appelle matrice des composantes des vecteurs $(v_1, \dots, v_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j -ème colonne est formée par les composantes du vecteur v_j dans la base $\mathcal{B}$.

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$$

4 Matrice d'une application linéaire

4.1 Définition

Définition 16.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F .

Toute application linéaire f de E dans F est déterminée par $(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

On appelle matrice de f par rapport aux bases $(e_1, \dots, e_p)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des composantes des vecteurs $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de F .

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}, f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \varepsilon_i$$

On définit ainsi une bijection :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \end{aligned}$$

Théorème 14. Écriture matricielle d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ munis des bases $(e_1, \dots, e_p)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, f une application linéaire de E dans F représentée par A dans les bases (e_j) et (ε_i) .

Soit x un vecteur de E et $y = f(x)$.

Décomposons x et y dans les bases e_j et ε_i : $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

L'égalité $f(x) = y$ se traduit matriciellement par $AX = Y$.

4.2 Opérations

Théorème 15.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F , f et g deux applications linéaires de E dans F représentées respectivement par A et B dans les bases (e_j) et (ε_i) . Alors par rapport aux bases (e_j) et (ε_i) :

- la matrice de $f + g$ est $A + B$
- la matrice de λf est λA .

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ isomorphe à $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$.

Théorème 16.

Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ munis des bases $(e_1, \dots, e_p)$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $(\eta_1, \dots, \eta_m)$, f une application linéaire de E dans F représentée par A par rapport aux bases (e_j) et (ε_k) et g une application linéaire de F dans G

représentée par g par rapport aux bases (ε_k) et (η_i) . $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

- Alors la matrice de $g \circ f$ par rapport aux bases (e_j) et (η_i) est BA .

Théorème 17.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de matrice A dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E .

- f est bijectif si et seulement si A est inversible et alors A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans la base (e_i) .
- Pour que A soit inversible, il suffit qu'elle soit inversible à gauche ou à droite.

4.3 Rang

Définition 17.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$ munis de leurs bases canoniques. On définit alors le noyau, l'image et le rang de la matrice comme étant le noyau, image et rang de cette application linéaire.

Théorème 18.

Le rang de A est égal au rang de ses vecteurs colonnes.

Toutes les applications linéaires qui admettent A comme matrice ont même rang, égal au rang de A .

Théorème 19.

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

Le rang d'une matrice est donc égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes.

5 Changement de bases

Définition 18.

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une nouvelle base de E . On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice $P = (p_{ij})$ des composantes des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$$

Théorème 20. Changement de bases pour les coordonnées d'un vecteur

Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ les composantes d'un vecteur x de E dans les bases (e_i) et (e'_j) , alors $X = PX'$.

Remarque 1.

Si P est la matrice de passage de la base (e_i) à la base (e'_j) , alors P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de la base (e'_i) à la base (e_j) .

5.1 Changement de bases pour un endomorphisme

Théorème 21.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $(e_1, \dots, e_n)$, $(e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E , et f un endomorphisme de E .

On appelle :

- A la matrice de f par rapport à la base (e_i)
- A' la matrice de f par rapport à la base (e'_i) .
- P la matrice de passage de (e_i) à (e'_i) .

Alors on a : $A' = P^{-1}AP$.

5.2 Matrices semblables

Définition 19.

Soient A et A' deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ces matrices sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A' = P^{-1}AP$.

Théorème 22.

Soient A et A' deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et E un espace vectoriel de dimension n .

Ces matrices sont semblables si et seulement si A et A' sont les matrices d'un même endomorphisme de E par rapport à deux bases différentes.

6 Réduction des endomorphismes

6.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 20. : Valeur propre d'un endomorphisme

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ et λ un scalaire.

On dit que λ est valeur propre de f s'il existe un vecteur x de E **non nul** tel que $f(x) = \lambda x$.

L'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme f est appelé spectre de f .

Proposition 7. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. λ est valeur propre de f .
2. L'endomorphisme $(f - \lambda Id)$ est non injectif.
3. $\ker(f - \lambda Id) \neq \{0\}$.

Si E est de dimension finie :

4. L'endomorphisme $(f - \lambda Id)$ est non inversible.
5. Le rang de $(f - \lambda Id)$ est strictement inférieur à la dimension de E .

Définition 21. : Sous-espace propre

Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f .

Le sous-espace vectoriel $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id) = \{x \in E, f(x) = \lambda x\}$ est appelé sous espace propre associé à λ .

Par définition d'une valeur propre il n'est pas réduit à $\{0\}$.

Définition 22. : Vecteur propre d'un endomorphisme

On dit que le vecteur x **non nul** de E est vecteur propre de f si $f(x)$ est colinéaire à x : $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x$.

Le scalaire λ est appelé valeur propre associée à x .

Proposition 8.

Soit x un vecteur non nul de E . Alors x est vecteur propre de f si et seulement si la famille $(x, f(x))$ est liée.

Proposition 9.

Soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ . Alors x est vecteur propre de f^n associé à λ^n .

6.2 Valeur propre, vecteur propre d'une matrice carrée

Définition 23. : Valeur propre d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n et λ un scalaire.

On dit que λ est valeur propre de A s'il existe un vecteur ${}^tX = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$.

Proposition 10. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) λ est valeur propre de A .
- b) La matrice $(A - \lambda I_n)$ est non inversible.
- c) Le rang de $(A - \lambda I_n)$ est strictement inférieur à n .

Théorème 23.

Soit f un endomorphisme de E de matrice A dans une base de E .

Alors λ est valeur propre de f si et seulement si λ est valeur propre de A .

Définition 24. : Sous-espace propre

Soit λ une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le sous-espace vectoriel $\ker(A - \lambda I_n)$ est appelé sous-espace propre associé à λ .

Par définition d'une valeur propre il est de dimension supérieure ou égale à 1.

Définition 25. : Vecteur propre d'une matrice

On dit que le vecteur ${}^tX = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ **non nul** est vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}, AX = \lambda X$.

Le scalaire λ est appelé valeur propre associée à X .

Théorème 24. (admis)

Toute matrice A à coefficients complexes admet au moins une valeur propre complexe.

Ce résultat est faux dans $\mathbb{R}$. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de valeur propre réelle.

Proposition 11.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice triangulaire est l'ensemble des termes de la diagonale.

6.3 Propriétés des valeurs propres et des sous-espaces propres**Théorème 25.**

Soit f un endomorphisme de E . Soient $(v_1, \dots, v_p)$ des vecteurs propres associés respectivement à des valeurs propres de f deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Alors la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.

Conséquence

Soit f un endomorphisme de E ayant p valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et soient $(w_1, \dots, w_p)$ des vecteurs tels que $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $f(w_i) = \lambda_i w_i$. Si $w_1 + \dots + w_p = 0$ alors $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $w_i = 0$.

Théorème 26.

a) Si E est de dimension n alors tout endomorphisme de E a au plus n valeurs propres distinctes.

b) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes de f est libre.

Donc la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n .

6.4 Diagonalisation**Définition 26.**

E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E . On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de f est diagonale.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale, c'est à dire :

Il existe une matrice carrée P d'ordre n inversible, telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Théorème 27.

Soit f un endomorphisme de E de matrice A dans une base de E . Alors f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Théorème 28.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n . Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

La réciproque est fausse. Par exemple l'identité est diagonalisable et n'admet qu'une seule valeur propre.

Théorème 29.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

f est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est la dimension de E .

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ étant les valeurs propres de f , f est diagonalisable si et seulement si $\dim E = \sum_{j=1}^p \dim \ker(f - \lambda_j Id)$.

Théorème 30. (admis)

Toute matrice **réelle** carrée symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale.

C'est faux pour une matrice complexe. Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.