Nombres complexes

1 Forme algébrique

Définition 1.
On appelle nombre complexe, un nombre qui s'écrit de façon unique sous la forme $z = x + iy$ où x et y sont des réels et i un élément vérifiant $i^2 = -1$.
x est appelé la partie réelle de z et y la partie imaginaire de z.
Cette écriture est appelée forme algébrique du nombre complexe z.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

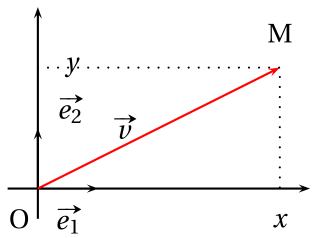
Définition 2. Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$
Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ $(x, y, x', y'$ réels) deux nombres complexes. On pose :

- $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$
- $z.z' = (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx')$

$\mathbb{C}$ muni de ces deux lois a une structure de corps.

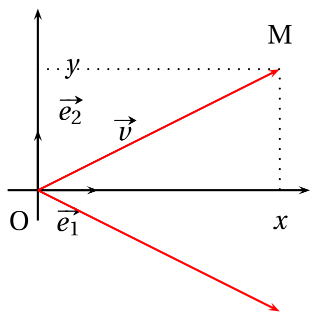
2 Représentation géométrique

Définition 3.
Un plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
Soit le nombre complexe $x + iy$ où x et y sont deux nombres réels, .
Son image ponctuelle est le point M de coordonnées (x, y).
Son image vectorielle $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$.
Le nombre complexe $x + iy$ est appelé affixe de M et de $\vec{v}$.



3 Nombres complexes conjugués

Définition 4.
x et y étant deux réels, on appelle nombre conjugué de $x + iy$, le nombre complexe $x - iy$.
On note $\overline{z}$ le conjugué de z.
Les points images de deux complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Propriété 1. *Quels que soient les nombres complexes z, z' :*

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$
3. *Si z' est non nul,* $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ *et* $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

4 Module d'un nombre complexe

Définition 5. Soit $z = x + iy$. Alors le nombre $z\overline{z} = x^2 + y^2$ est réel positif. On appelle module de z et on note $|z|$ la racine carrée de $z\overline{z}$.

Remarque Si M est l'image du nombre complexe z, alors la longueur OM est égale au module de z.

Propriétés 1. *Soient z et z' deux nombres complexes quelconques :*

1. $z = 0$ *équivaut à* $|z| = 0$.
2. $|zz'| = |z||z'|$ *et si z' n'est pas nul,* $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
3. $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ *(inégalité triangulaire)* *et* $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|$.

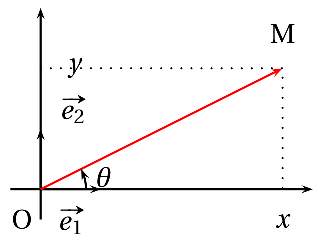
5 Arguments d'un nombre complexe non nul

Le plan complexe est muni du repère $(0; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ orthonormal direct.

Définition 6. Un argument du complexe z non nul d'image M dans le plan complexe est une mesure θ de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$.

Notation On pose $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.

Si on désigne par r le module de z (en fait $r = |z|$) et θ un argument de z, on a :
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$
On a donc $z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r\mathrm{e}^{i\theta}$



Propriétés 2. *On considère deux réels θ et θ' et un entier relatif n. Alors :*

$|\mathrm{e}^{i\theta}| = 1$ $\qquad \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$ $\qquad \overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta}$ $\qquad \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}} = \mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$

$(\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta}$ *(Formule de Moivre)*

$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$ *et* $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$ *(Formules d'Euler)*

6 Équation du second degré

Propriétés 3. *L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c réels, $a \neq 0$) admet des solutions dans $\mathbb{C}$.*
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation.

1. *Si $\Delta = 0$ il y a une seule solution réelle égale à* $-\dfrac{b}{2a}$
2. *Si $\Delta > 0$ il y a deux solutions réelles distinctes :* $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
3. *Si $\Delta < 0$ il y a deux solutions distinctes complexes conjuguées :* $\dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ *et* $\dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Propriétés 4. *Si z_1 et z_2 sont les racines de $az^2 + bz + c$ alors $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1z_2 = \dfrac{c}{a}$.*
Réciproquement si $z_1 + z_2 = S$ et $z_1z_2 = P$, alors z_1 et z_2 sont les racines de $z^2 - Sz + P$.

7 Exponentielle complexe

Définition 7. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. L'exponentielle de z est $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big)$.

Propriétés 5. *Quels que soient les nombres complexes z, z', $\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}$.*

Polynômes

$\mathbb{K}$ désignera le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

8 Définition

Définition 8.
On appelle fonction polynomiale (ou polynôme) à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute fonction A de $\mathbb{K}$ dans lui-même telle qu'il existe un entier naturel n et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ vérifiant :
$\forall x \in \mathbb{K},\ A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.

Notation 1.
On note X la fonction de $\mathbb{K}$ dans lui-même définie par $X : x \mapsto x$.
On a alors $A = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$.
L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}[X]$.
Muni des opérations usuelles, c'est un espace vectoriel.

9 Polynôme dérivé

Définition 9.
Soit $A = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$.
On appelle polynôme dérivée de A le polynôme $A' = a_1 + \cdots + n a_n X^{n-1}$.
On définit par récurrence la dérivée p^e de A notée $A^{(p)}$.

Théorème 1.
Les coefficients d'un polynôme sont uniques : $\forall p \in \mathbb{N}, p! a_p = A^{(p)}(0)$.
La famille $(1, X, \dots, X^n)$ *est libre dans* $\mathbb{K}[X]$.
Deux polynômes ayant en tout point une même valeur numérique ont mêmes coefficients.

10 Degré

Définition 10.
Soit A un polynôme non nul. On appelle degré de A le plus grand des indices n tel que $a_n \neq 0$.
Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Propriétés 6.
Soient A *et* B *deux polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$.
Alors le degré de $A+B$ *est inférieur ou égal au maximum des degrés de* A *et de* B : $d(A+B) \leqslant \max(d(A), d(B))$.
Le degré de AB *est égal à la somme des degrés de* A *et de* B : $d(AB) = d(A) + d(B)$.
Si le produit de deux polynômes est nul, alors l'un des deux est nul.

11 Racines

Définition 11.
On dit que l'élément $\lambda \in \mathbb{K}$ est racine (zéro) du polynôme A de $\mathbb{K}[X]$ si $A(\lambda) = 0$.

Théorème 2.

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est racine de A si et seulement si A est factorisable par $(X - \lambda)$.*
2. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ distincts.*
   $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont racines de A si et seulement si A est factorisable par $(X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$.
3. *Si A est un polynôme de degré inférieur ou égal à n ayant $n + 1$ zéros distincts, alors $A = 0$.*

Définition 12.
Soit k un entier naturel non nul. On dit que l'élément $\lambda \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre k du polynôme A de $\mathbb{K}[X]$ si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = (X - \lambda)^k Q$ et $Q(\lambda) \neq 0$.

Théorème 3.
Soit k un entier naturel non nul.

1. *Si λ est racine d'ordre $k \geqslant 2$ de A, alors λ est racine d'ordre $k - 1$ de A'.*
2. *L'élément λ de $\mathbb{K}$ est racine d'ordre k du polynôme A de $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si*
   $A(\lambda) = A'(\lambda) = \cdots = A^{(k-1)}(\lambda) = 0$ et $A^{(k)}(\lambda) \neq 0$.

12 Factorisation

Théorème 4. ***: Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}$ (Théorème de d'Alembert-Gauss)***
Soit n un entier naturel non nul. Tout polynôme de degré n à coefficients complexes admet n racines complexes comptées avec leur ordre de multiplicité.
Il est donc produit de polynômes complexes de degré 1 : $A = a(X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$