Rapport Méthodes de calcul et raisonnement 2018

L'objectif de ce rapport n'est pas d'accabler les candidats en énumérant les erreurs qu'ils ont pu commettre mais de pointer certaines lacunes récurrentes afin d'aider les futurs candidats dans leur préparation.
De façon générale, la présentation des copies est plutôt bonne mais la rédaction est souvent approximative.
Avant de rentrer dans le détail, soulignons qu'il est important lorsque l'on utilise un théorème (changement de variable, intégration par parties, inégalité de Bienaymé-Tchebychev, formule des probabilités totales...) d'en vérifier les hypothèses.
De même tout calcul d'espérance et plus généralement d'intégrale, de somme de série, de limite... doit être précédé d'une justification de leur existence.

Exercice :

Il s'agissait d'un exercice relativement classique portant sur l'étude d'une variable à densité.

1. Cette question est globalement bien traitée mais le calcul de la dérivée ou sa factorisation ont souvent été source d'erreurs de calcul.

   Pour justifier la limite en $+\infty$, un argument de croissances comparées a été accepté mais les meilleures copies ont fait le changement de variable adéquat .

   La continuité en zéro (qui n'était pas demandée dans cette question) est souvent affirmée, comme la dérivabilité en zéro (qui elle est fausse). Il est important de remarquer que f n'est pas définie de la même façon sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-}$. Par ailleurs écrire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ ne permet pas de conclure à la continuité de f en 0.

   Certaines copies ne tracent le graphe que sur $\mathbb{R}^{+}$, la majorité des autres tracent un graphe correct sans remarquer qu'il entre en contradiction avec la dérivabilité de f en zéro. Enfin, le graphe de f est malheureusement souvent "pointu" en contradiction avec la régularité annoncée.

   Rares sont finalement les copies ayant tous les points à cette question.

2. Seul un tiers des candidats a eu tous les points à cette question.

   De nombreuses copies commencent par "Pour que f soit une densité de probabilité, il faut que..." : rappelons qu'il importe de vérifier des conditions suffisantes.

   Pour la positivité, on note quelques raisonnements fantaisistes comme "$c > 0$ donc $1/c^2 > 0$" et des erreurs de rédaction comme "pour $t < 0$, f est continue" au lieu de "f est continue sur $\mathbb{R}_{-}$."

   Souvent la continuité en zéro est affirmée alors qu'elle n'est même pas nécessaire. Là encore, il est désagréable de lire "pour $t \geq 0$, $f(t)$ est continue" au lieu de "f est continue sur $\mathbb{R}^{+}$"....

3. (a) Seulement 2/3 des copies donnent la réponse correcte. Certains affirment même que l'intégrale est nulle...

   (b) Beaucoup de candidats ont tenté de comparer les fonctions à intégrer et ont pour cela utilisé des inégalités fausses comme $e^{-t^2/(2c^2)} \leq e^{-t^2/2}$.

   Les hypothèses du théorème de changement de variable ne sont quasiment jamais données.

   Le recours à une loi gaussienne permettait d'obtenir le résultat directement.

   Enfin, on trouve dans certaines copies "l'intégrale est paire" alors que c'est l'intégrande qui est une fonction paire.

   (c) Moins de 15% des candidats réussissent complètement cette question. La convergence absolue est souvent oubliée ainsi que les hypothèses du théorème d'intégration par parties.

Le calcul effectif de l'espérance n'était pas nécessaire.

4. L'intégration par parties n'a pas été si souvent repérée et les problèmes de justification ont été les mêmes qu'à la question précédente.
5. La récurrence est généralement bien rédigée. L'hérédité pour les termes pairs est souvent réussie, contrairement à celle pour les termes impairs.

   Certains candidats tentent d'"arnaquer" les correcteurs ce qui est lourdement sanctionné.
6. (a) Moins d'un quart des candidats ont tous les points à cette question de cours. L'inégalité est souvent juste mais ses hypothèses ne sont que rarement toutes mentionnées.

   (b) Les étudiants ont peu traité cette question, ne pensant pas (ou n'osant pas) à utiliser les questions précédentes alors qu'ils peuvent tout à fait les admettre.

   Lorsqu'ils le font, les erreurs de calcul sont fréquentes. Bien que les réponses cohérentes avec les résultats précédents (même faux) aient été valorisées, seul un tiers des copies obtient les points de cette question.

   (c) Moins de la moitié des candidats ont abordé cette question pourtant classique. Sauf exception, le passage entre inégalité stricte et large n'est pas justifié. Les calculs ne sont pas toujours aboutis.
7. Question peu abordée. Le fait de relier la probabilité demandée à la fonction de répartition a été valorisé.
8. Question peu abordée.

Problème :

On étudiait dans ce problème le modèle de diffusion d'Ehrenfest. On s'intéressait notamment à la probabilité stationnaire.
Pour cela, dans la première partie, on déterminait sur des cas particuliers puis dans le cas général, la matrice de transition et on prouvait que 1 était valeur propre.
L'espace propre associé et la probabilité stationnaire étaient déterminés dans une troisième partie. L'espérance du nombre de boules dans la première urne s'obtenait à l'aide d'une suite arithmético-géométrique, ce résultat plus simple était traité dans la seconde partie.
Signalons que le fait qu'une matrice stochastique possède 1 comme valeur propre n'est pas un résultat au programme.

I. Matrice de transition

1. (a) Plusieurs types de justification étaient possibles mais, la matrice étant donnée par l'énoncé, on attendait des arguments : formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements utilisé, union d'évènements disjoints, justification des probabilités conditionnelles...

   Seulement 15% des copies ont été totalement convaincantes.

   Cette question a aussi été l'occasion de voir des erreurs importantes de logique, certains candidats partant de la matrice donnée par le sujet et l'interprétant au lieu de la justifier.

   (b) Il s'agit d'une question qui valorise les candidats maîtrisant la méthode du pivot de Gauss. Il y a malheureusement beaucoup d'erreurs de calcul sur les valeurs propres et finalement seul un quart des copies a eu tous les points. Notons qu'il n'était pas nécessaire de déterminer les espaces propres, la matrice possédant trois valeurs propres distinctes.

Il y a par ailleurs une confusion courante entre diagonalisabilité et inversibilité : "A diagonalisable $\iff$ $A - \lambda I$ est non inversible" ou encore "A est diagonalisable car A n'admet pas 0 comme valeur propre".

Enfin, de nombreuses copies affirment que la matrice est symétrique donc diagonalisable. Or, la matrice n'était pas symétrique et si elle l'avait été il aurait fallu préciser qu'elle était symétrique *réelle*.

2. On constate les mêmes écueils qu'à la première question.

   Certains invoquent un vague "raisonnement analogue" à celui de la question 1a), il y a certes un lien avec le cas particulier mais cette justification ne suffit pas.

   L'étude des bords, c'est-à-dire la justification de la première et de la dernière ligne de A, devait être faite à part.
3. Beaucoup d'erreurs de calculs. Soit dans la transposition des matrices soit dans la résolution du système. Un résultat cohérent était valorisé lorsqu'il y avait erreur sur la matrice étudiée.
4. Peu de candidats utilisent la question précédente pour conjecturer un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Les candidats ayant obtenu un vecteur X tel que $AX = X$ oublient souvent de préciser que le vecteur X est non nul afin de conclure.
5. Il ne fallait pas affirmer sans justifications que A et sa transposée avaient les mêmes valeurs propres (résultat hors-programme) mais utiliser le fait qu'une matrice et sa transposée ont le même rang.

II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n

1. La question était extrêmement simple et était là pour guider la résolution de la question suivante.

   Presque 2/3 des copies ont trouvé le bon résultat, mais seulement la moitié d'entre elles ont donné des justifications (on attendait une phrase d'explications).
2. Question très peu traitée. Les calculs sont rarement menés à terme.
3. Un tiers des candidats identifie qu'il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. La méthode pour obtenir son terme général est généralement connue mais les erreurs de calculs sont fréquentes.
4. Question peu abordée car elle nécessitait la précédente.

   Le fait que la raison soit dans $]-1, 1[$ manquait souvent.

   L'interprétation est rarement juste. Nombreux sont les candidats qui affirment qu'au bout d'un grand nombre d'expériences, il y aura $N/2$ boules dans la première urne sans s'interroger sur la parité de N.

   Notons que l'espérance d'une variable aléatoire (même finie) n'est pas forcément une valeur atteinte.

III. Étude de la probabilité stationnaire

1. Il s'agissait d'une question difficile qui a été peu abordée.
2. 20% des candidats affirment souvent que l'espace propre associé à 1 est une droite mais rares sont ceux qui le justifient.

   Les étudiants utilisent fréquemment la question précédente pour prouver une inclusion et concluent à une égalité sans argument supplémentaire... Le fait que l'espace vectoriel soit engendré par un vecteur non nul est très peu mentionné.
3. La formule du binôme de Newton est bien connue. Les 2/3 des candidats ayant abordé la question ont donné une réponse correcte et justifiée.

4. Cette question a été l'objet de beaucoup d'erreurs de logique.

   Le raisonnement par analyse-synthèse est rarement maîtrisé. Il y a aussi des confusions sur les équivalences qui ne sont souvent que des implications.

   Il est préférable de séparer la preuve de l'existence de celle de l'unicité afin d'éviter les erreurs de logique.

5. Quelques candidats repèrent une loi binomiale mais les paramètres sont souvent farfelus.

6. Question peu abordée. L'interprétation était suggérée par le titre de la sous-partie...